ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ
ΚΑΙ
ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΩΝ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

1ο ΘΕΜΑ

(3,0 Μονάδες)

Για την επίλυση της εξίσωσης «καθαρής συναγωγής»

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \qquad (1.1)$$

(εξίσωση (1.1)) διακριτοποιούμε τον εξεταζόμενο χώρο με την βοήθεια κανάβου, τα σημεία του οποίου έχουν σταθερή απόσταση, ίση με Δx, και τον χρόνο με χρονικά βήματα σταθερού μεγέθους Δt.

1^{α}) Θεωρούμε το πεδίο ταχυτήτων σταθερό (*u*=σταθερό) και χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό του αριθμού *Courant*

$$Cr = \frac{u(\Delta t)}{\Delta x}$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε η αρχική κατανομή της συγκέντρωσης είχε μορφή ισοσκελούς τριγώνου.

Επιλέγουμε διαδοχικά τρεις τιμές για τον αριθμό *Courant*

Α) Cr=0.5
Β) Cr=1.0
Γ) Cr=2.0

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παίρνουν τις παρακάτω μορφές (όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά)

α) Το προφίλ της συγκέντρωσης υπόκειται σε ακανόνιστες ταλαντώσεις και η μορφή του μεταβάλλεται χαοτικά
β) Το προφίλ της συγκέντρωσης διατηρεί το αρχικό τριγωνικό του σχήμα, και απλώς μετατοπίζεται (η απόσταση μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου)
γ)Το προφίλ της συγκέντρωσης «απλώνεται» αλλά και μετατοπίζεται (η απόσταση μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου

Συνδυάστε τις επιλογές του αριθμού Courant Α), Β) ,Γ) με τις χαρακτηριστικές μορφές του πεδίου συγκέντρωσης α), β) και γ).

Ποια από τις τρεις περιπτώσεις α) β) ή γ) αντιστοιχεί με την ακριβή λύση της (Ι);

1β) Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση συναγωγής-διασποράς (ή οποία ονομάζεταιι και εξίσωση μεταφοράς-διασποράς, ή συναγωγής-διάχυσης κλπ.) –εξίσωση 1.2 όπου D ο συντελεστής διάχυσης ή διασποράς.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (1.2)$$

Με την βοήθεια ποιού αδιάστατου αριθμού μπορούμε να εξετάσουμε αν η εξίσωση (1-2) μπορεί να απλοποιηθεί στην εξίσωση της καθαρής συναγωγής (εξίσωση1.1);

2ο ΘΕΜΑ

(1,5 Μονάδες)

Στην παράδοση είχαν παρουσιαστεί ένας αριθμός από υπολογιστικά για την επίλυση της εξίσωσης της καθαρής διάχυσης.
Εξηγείστε για ποιους λόγους είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν αυτές οι μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν τη μεταβολή θερμοκρασίας σε στερεά σώματα αλλά και την κίνηση νερού σε υπόγειους γεωλογικούς σχηματισμούς

3ο ΘΕΜΑ

(1,0 Μονάδα)

Πως γίνεται ο έλεγχος της αξιοπιστίας των υπολογιστικών σχημάτων; Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον σκοπό αυτό μαθηματικές σχέσεις οι οίες είχαν παρουσιαστεί σε προγενέστερα έτη του Τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος;

4ο ΘΕΜΑ

(2,5 Μονάδες)

Για την επίλυση της εξίσωσης καθαρής διάχυσης έχει παρουσιαστεί στην παράδοση και στα αντίστοιχα εργαστήρια (και αναφέρονται στο βιβλίο Υπολογιστική Υδραυλική) τόσο το υπολογιστικό σχήμα *FTCS* (*Forward in Time ad Central Space*) αλλά και υπολογιστικό σχήμα *Leap Frog*.

α) Κατά την γνώμη σας τα σχήματα αυτά προκύπτουν από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, οριακών στοιχείων ή Random walk;
β) Τα δύο αυτά σχήματα χαρακτηρίζονται σαν «ρητά» ή πεπλεγμένα;. Εξηγείστε (σύντομα) τι σημαίνει αυτοί οι όροι. γ) Εξηγείστε τους περιορισμούς στην χρήση τόσο του σχήματος *FTCS* αλλά και του σχήματος *Leap Frog*. Ποιο από τα δύο χρησιμοποιείτε συχνότερα ην πράξη;
γ) Μία βελτιωμένη μορφή του σχήματος *Leap Frog* είναι το σχήμα *DuFort-Frankel.* Τα δύο αυτά σχήματα έχουν παρεμφερή δομή. Εξηγείστε ποιος ειδικός χειρισμός απαιτείται κατά την χρήση αυτών των σχημάτων όσο αφορά τις αρχικές συνθήκες.

5ο ΘΕΜΑ
(3,0 Μονάδες)

Στις ορισμένες από τις αριθμητικές μεθόδους μετατρέπουμε τις διαφορικές εξισώσεις που εξετάζουμε σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο μπορεί να γραφεί με την εξής γενική μορφή:

A X =B **(5.1)**

Όπου **A** είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων**, X** είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων ενώ **B** είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (μη ομογενών) όρων.

5α) Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (της μορφής 2.1).
Κατά την γνώμη σας η μέθοδος LU παραγοντοποίησης. ενδείκνυται όταν:

5α1)Ο πίνακας **A** είναι σταθερός (μένει αμετάβλητος σε κάθε χρονικό σημείο), αλλά ο πίνακας-στήλη **B** μεταβάλλεται σε κάθε χρονικό σημείο
$5\alpha 2$)Ο πίνακας **A** μεταβάλλεται σε κάθε χρονικό σημείο, αλλά ο πίνακας-στήλη **B** είναι σταθερός (μένει αμετάβλητος σε κάθε χρονικό σημείο.
$5\alpha 3$) Τόσο ο πίνακας **A** αλλά και ο πίνακας-στήλη **B** μεταβάλλονται σε κάθε χρονικό σημείο
Αιτιολογείστε την απάντηση σας, (ενδεχόμενα αφού περιγράψετε σύντομα τη μέθοδο *LU* παραγοντοποίησης.

5β) Αναφέρατε μία μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους οι οποίες περιγράφουν τη μεταφορά ρύπων, η οποία δεν κάνει χρήση της παραπάνω μεθόδου (δηλαδή της μετατροπής των διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα αλγεβρικών γραμμικών εξισώσεων). Μπορείτε να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου αυτης;