ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

-ΟΜΑΔΑ Β-

1$^{\text{ο}}$ ΘΕΜΑ

(1,5 Μονάδα)

4$^{\alpha}$)Στην Ρευστομηχανική, ποιες δύο συνθήκες πρέπει να ισχύουν, σχετικές με τον στοιχειώδη όγκο *V* στον οποίο εξετάζουμε τους μέσους όρους των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του συνεχούς μέσου; Οι συνθήκες αυτές πληρούνται συχνά στην πράξη;

4β) Παίρνοντας υπόψη σας την αρχή της διατήρησης της μάζας και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Reynolds, προκύπτει η παρακάτω έκφραση (η οποία δεν χρειάζεται να αποδειχθεί):

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \, div\vec{U} \right\} dV = 0 \qquad \text{(XX)}$$

όπου ρ η πυκνότητα και $\vec{U}$ το πεδίο ταχυτήτων

Η εξίσωση (ΧΧ) αναφέρεται (εν μέρει) σε μία περιγραφή κατά Lagrange.**Υποδείξτε δύο σημεία τα οποία ενισχύουν τον ισχυρισμό αυτό.**

Μετατρέψτε την εξίσωση (ΧΧ) στην πιο απλή δυνατή μορφή και χρησιμοποιείστε στην συνέχεια μία περιγραφή κατά Euler.

Αιτιολογείστε αναλυτικά τα βήματα που κάνετε για την απόδειξη, αναφέροντας ενδεχομένως σε ποια παράγραφο του συνοδευτικού φυλλαδίου αναφέρονται τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιείτε

2$^{\text{ο}}$ ΘΕΜΑ

(2 Μονάδες)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία άπειρη επίπεδη πλάκα εμβαπτισμένη σ’ έναν άπειρο χώρο ρευστού.

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο $t=0$ η πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα U πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται.
Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{f}$ θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες y και z (v και w) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση z θεωρούνται μηδενικές.

<u>Ερωτήσεις</u>

α) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή u (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση x)

β) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u για y=0 (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα). Δεδομένου ότι το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρο, ποια δεύτερη οριακή συνθήκη μπορούμε να χησιμοποιήσουμε;

γ) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Οι μόνοι όροι για τους οποίους μία αιτιολογία είναι απαραίτητη, είναι οι όροι:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *και* $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ *οι οποίοι εμφανίζονται στην εξίσωση:*

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

εάν ένας ή περισσότεροι από τους όρους αυτούς δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί /(θεωρηθούν) αμελητέος (αμελητέοι), δεν είναι απαραίτητο να δοθεί κάποια σχετική αιτιολογία

δ) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

δα-Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του *x*.
δβ- Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση είναι συνάρτηση μόνο του *y*.

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση γ)

3ο ΘΕΜΑ

(2 Μονάδες)

Μία τυπική μεθοδολογία προσομοίωσης της ροής για την περίπτωση της τύρβης είναι η εισαγωγή «μέσων» μεγεθών, τα οποία για την περίπτωση της μακροσκοπικά μόνιμης ροής ορίζονται από την σχέση:

$$< q > = \frac{1}{T}\int_0^T q \quad dt , \qquad (3.1)$$

όπου το q μπορεί να είναι μία από τις συνιστώσες της ταχύτητας (u, v, w), p η πίεση , ενώ t είναι ο χρόνος. Το χρονικό διάστημα T πρέπει να εκλεγεί κατάλληλα για να μην εξαρτάται το $\langle q \rangle$ από τον χρόνο.

Κατά συνέπεια τα («στιγμιαία») μεγέθη της εξίσωσης Navier-Stokes, μπορούν να εκφραστούν με την σχέση:

$$q = < q > + q'$$

όπου q' διαταραχή (ή απόκλιση) του στιγμιαίου μεγέθους q ως προς την μέση τιμή του $<q>$.

3α) Μπορείτε να αποδείξετε ότι το μέγεθος $< q' >$ το οποίο (προφανώς) ορίζεται από την σχέση:

$$< q' > = \frac{1}{T}\int_0^T q' \quad dt$$

είναι ίσο με το μηδέν;

3β) Κάνοντας χρήση της παραπάνω ιδιότητας και αν θέσουμε $q=u$ (u η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση) αποδείξτε την σχέση:

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2 \quad dt = \left(< u >\right)^2 + \frac{1}{T}\int_0^T \left(u'\right)^2 dt$$