ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

-ΟΜΑΔΑ Β-

1η Άσκηση

(3,5 Μονάδες)

Εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται σε έναν στοιχειώδη όγκο ρευστού $V(t)$, και παίρνοντας υπόψη μας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (διατήρηση της ορμής), αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V(t)}\left(\rho\vec{U}dV\right)=\iiint_{V(t)}\left(\rho\vec{f}+div\sigma_{ij}\right)dV \qquad \text{(A)}$$

όπου:

- $\vec{U}$: το πεδίο των ταχυτήτων
- ρ: Η πυκνότητα του ρευστού
- $\vec{f}$: Οι εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες εξασκούνται
- σ_{ij} : Ο τανυστής των τάσεων

(Η εξίσωση (Α) θεωρείται δεδομένη και δεν χρειάζεται να αποδειχθεί. Η εξίσωση αυτή ισχύει για τις περιπτώσεις μη ασυμπίεστης και ασυμπίεστης ροής, για νευτώνεια και μη νευτώνεια ρευστά.)

Με βάση την (Α) αποδείξτε ότι

1α) $\iiint_{V(t)}\left((\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\right)-\rho\vec{f}-div\sigma_{ij})dV=0$

1β) $\left(\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\right)-\rho\vec{f}-div\sigma_{ij}=0$

1γ) Σε ποιόν από τους όρους της 1β) περιέχονται οι μη γραμμικοί (ως προς την ταχύτητα) όροι αδρανείας; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

Για την απόδειξη της (1α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα μεταφοράς Reynolds (θέτοντας $\Phi=\rho\vec{U}$), την εξίσωση της συνέχειας, (η οποία όπως αναφέρεται στο βιβλίο του κ. Κωτσοβίνου και αποδείχτηκε στην παράδοση μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{U} = 0$), αλλά και την προφανή σχέση: $\frac{D(\rho\vec{U})}{Dt} = \rho\frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U}\frac{D\rho}{Dt}$.

1δ) Αποδείξτε ότι οι δύο παρακάτω μορφές της εξίσωσης της συνέχειας είναι ισοδύναμες:

$X)\qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{U} = 0$ και

$Y)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{U}\right) = 0$

Αιτιολογείστε αναλυτικά τα βήματα που κάνετε για την απόδειξη, αναφέροντας ενδεχομένως σε ποια παράγραφο του συνοδευτικού φυλλαδίου και της παρούσης εκφώνησης αναφέρονται τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιείτε

2η Άσκηση

(1,5 Μονάδα)

Θεωρώ ροή γύρω από επίπεδη πλάκα . Η ροή είναι ασυμπίεστη και η πίεση σταθερή. Πάνω από την πλάκας σχηματίζεται οριακή στιβάδα παχους Δ. Στο εσωτερικό οριακής στιβάδας της η ροή είναι δισδιάστατη και ισχύει:

$u_x >> u_y$ και $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$

Η εξίσωση Navier-Stokes γύρω από δισδιάστατη επίπεδη πλάκα γράφεται:

$$-\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\rho\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

(Για την εξίσωση (1) ισχύουν όλες οι συμβάσεις που αναφέρθηκαν στην παράδοση και αναφέρονται στο συνοδευτικό φυλλάδιο),

ενώ έξω από την οριακή στιβάδα το πεδίο ταχύτητας είναι σταθερό με μία μόνο συνιστώσα: $u_x = U_\infty = const$

Παίρνοντας υπόψη εξίσωση της συνέχειας, κάνοντας τους αναγκαίους μετασχηματισμούς και ολοκληρώνοντας κατά μήκος της οριακής στιβάδας, φθάνω στην παρακάτω εξίσωση:

$$\Rightarrow \rho \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y + \rho [u_y (U_\infty - u_x)]_0^{\Delta} = -\mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_o^{\Delta} \qquad (2)$$

Εξηγείστε αναλυτικά γιατί η εξίσωση (2) μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω μορφή:

$$\int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y = +\nu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_0$$

(Στην εξίσωση (2) χρησιμοποιούμε την κλασσική σύμβαση ότι οι τιμές πίσω (πάνω και κάτω) από τις τετράγωνες αγκύλες, αντιπροσωπεύουν όρια της ολοκλήρωσης:

Π.χ. : $I = \int_a^b x \; dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$,

και επιπλέον(όπως είναι προφανές) την σύμβαση ότι η αρχή του άξονα y βρίσκεται στην διεπιφάνεια του ρευστού με την πλάκα).