ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

Φεβρουάριος 2009

-ΟΜΑΔΑ Α-

1ο ΘΕΜΑ

(3,0 Μονάδες)

α)Υποθέτουμε ότι έχουμε μία άπειρη επίπεδη πλάκα εμβαπτισμένη σ' έναν ημιάπειρο χώρο ρευστού.

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο $t=0$ η πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα U πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται.

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{f}$ θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες y και z (v και w) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση z θεωρούνται μηδενικές.

Ερωτήσεις

α1) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή u (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση x)

α2) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u για $y=0$ (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα). Δεδομένου ότι το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρο, ποια δεύτερη οριακή συνθήκη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

α3) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Οι μόνοι όροι για τους οποίους μία αιτιολογία είναι απαραίτητη, είναι οι όροι:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *και* $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ *οι οποίοι εμφανίζονται στην εξίσωση:*

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

εάν ένας ή περισσότεροι από τους όρους αυτούς δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί /(θεωρηθούν) αμελητέος (αμελητέοι), δεν είναι απαραίτητο να δοθεί κάποια σχετική αιτιολογία

β) Αφού γίνει χρήση των μετασχηματισμών

$$\theta=\frac{y}{2\sqrt{vt}}$$

και $f(\theta)=\dfrac{u(y,t)}{U}$

η απλοποιημένη εξίσωση Navier-Stokes μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2}+2\theta\frac{df}{d\theta}=0 \qquad \text{(I)}$$

(**Δεν** απαιτείται να αποδειχτεί πως προκύπτει η παραπάνω εξίσωση I)

Απαντήστε στις εξής ερωτήσεις:

β1) Γράψτε της κατάλληλες οριακές συνθήκες για την διαφορική εξίσωση (I) αφού πάρετε υπόψη σας τις απαντήσεις σας στις ερωτήσεις α1) και α2). Αιτιολογείστε σύντομα τις απαντήσεις σας.

β2) Μετατρέψτε την εξίσωση (I) σε μία κανονική πρωτοβάθμια διαφορική εξίσωση με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό.

ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

1.Εξισώσεις Navier-Stokes για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho f_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

u,v,w είναι η συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις x,y,z αντίστοιχα. P είναι το πεδίο πίεσης, ρ είναι η πυκνότητα, μ είναι το δυναμικό ιξώδες, t είναι ο χρόνος. $\vec{f}$ είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

2. Εξίσωση συνέχειας-διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση της συνέχειας μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας με διανυσματική μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\vec{u})=0$$

Χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις Einstein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0$$

Για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής (σταθερή πυκνότητα):

$$\frac{\partial(u)}{\partial x}+\frac{\partial(v)}{\partial y}+\frac{\partial(w)}{\partial z}=0$$