



Λογικός Προγραμματισμός

Θοδωρής Ανδρόνικος &
Μιχάλης Στεφανιδάκης
Τμήμα Πληροφορικής
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Εισαγωγή (1)

- Τι είναι λογική;
 - Λογική είναι η ανάλυση των μεθόδων συλλογισμού.
- Η λογική ασχολείται με
 - τη δομή και
 - τη μορφή των προτάσεων
- Δεν ασχολείται με
 - το σημασιολογικό τους περιεχόμενο

Εισαγωγή (2)

- Παράδειγμα 1:
 - Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
 - Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
 - Άρα, ο Σωκράτης είναι θνητός.
- Παράδειγμα 2:
 - Όλα τα άλογα είναι χορτοφάγα.
 - Ο Άνεμος είναι άλογο.
 - Άρα, ο Άνεμος είναι χορτοφάγος.

Εισαγωγή (3)

- Σημασία έχει η δομή της συλλογιστικής διαδικασίας:
 - Όλοι τα αντικείμενα τύπου A έχουν την ιδιότητα B .
 - Το S είναι αντικείμενο τύπου A .
 - Άρα, το S έχει την ιδιότητα B .

Εισαγωγή (4)

- Η συστηματική τυποποίηση και καταγραφή των έγκυρων (δηλ., των σωστών) μεθόδων συλλογισμού είναι η κύρια δουλειά των λογικών (logicians).
- Όταν η λογική χρησιμοποιεί μαθηματικές τεχνικές και μελετά τα μαθηματικά, τότε έχουμε τη μαθηματική λογική.

Εισαγωγή (5)

- Ο «πατέρας» της λογικής είναι ο Αριστοτέλης.
- Η σοβαρή ενασχόληση των μαθηματικών με τη λογική ξεκινά στα τέλη του 19^{ου} αιώνα.
- **Αιτία;** Η ανακάλυψη των παραδόξων.

Εισαγωγή (6)

- Το παράδοξο του **Russell (1902)**:
 - Έστω ότι σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων (αφελής, παίει, ορισμός – δεν ισχύει).
 - Έστω ότι $A = \{X \mid X \notin X\}$.
 - Το A ανήκει στο A ή όχι;

Εισαγωγή (7)

- Το παράδοξο του **Cantor (1899)**:
 - Έστω $|A|$ ο πληθάριθμος (cardinal) του A .
 - $|A| = |B|$ ανν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί από το A στο B .
 - $|A| \leq |B|$ ανν $|A| = |B_0|$, όπου $B_0 \subseteq B$.
 - $|A| < |B|$ ανν $|A| \leq |B|$ και $|A| \neq |B|$.
 - $|A| < |P(A)|$ (**Cantor**)
 - Έστω V το σύνολο όλων των συνόλων, τότε:
 - $P(V) \subseteq V$ (εξ' ορισμού) και άρα $|P(V)| \leq |V|$
 - $|V| < |P(V)|$ (**Cantor**)
 - Άρα, $|V| = |P(V)|$

Εισαγωγή (8)

- Το παράδοξο του ψεύτη:
 - Έστω ότι ένας άνθρωπος ισχυρίζεται:
 - «Εγώ λέω ψέματα.»
 - Λέει ψέματα ή λέει αλήθεια;

Οι 2 βασικές έννοιες της λογικής

- Σύνταξη (syntax)
 - Μια τυπική γλώσσα στην οποία διατυπώνουμε προτάσεις.
- Σημασιολογία ή ερμηνεία (semantics)
 - Ένας κόσμος (πιο αυστηρά μια μαθηματική δομή) για τον οποίο «μιλάνε» οι προτάσεις μας.

Αλήθεια και ψέμα

- Πότε μια πρόταση είναι **αληθής**;
- Η αλήθεια μιας πρότασης είναι απόρροια της δομής της.
- Πότε μια πρόταση είναι **λογική συνέπεια** (**logical consequence**) ενός συνόλου προτάσεων;

Απόδειξη (1)

- Πως αποδεικνύεται ότι μια πρόταση είναι αληθής;
- **Αποδεικτική διαδικασία:** αλγόριθμος (που σημαίνει ότι επεξεργάζεται μηχανικά συμβολοσειρές χωρίς να ασχολείται με το νόημά τους) που **αποδεικνύει** αν μια πρόταση είναι αληθής (δηλ., απαντά **ναι** ή **όχι**).

Απόδειξη (2)

- Η αποδεικτική διαδικασία πρέπει να είναι:
 - Σωστή (sound), να αποδεικνύει μόνο αληθείς προτάσεις, και
 - Πλήρης (complete), να αποδεικνύει κάθε αληθή πρόταση.

Προτασιακή Λογική – Σύνταξη (1)

- Το αλφάβητο της γλώσσας:
 - Ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο \mathbf{A} από ατομικές προτάσεις: p_0, p_1, p_2, \dots .
 - Οι προτασιακοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \perp$.
 - Οι παρενθέσεις $(,)$.

Προτασιακή Λογική – Σύνταξη (2)

- Το σύνολο των προτάσεων \mathbf{P} είναι το **μικρότερο** σύνολο για το οποίο ισχύουν:
 - Κάθε ατομική πρόταση ανήκει στο \mathbf{P} .
 - Αν $\phi, \psi \in \mathbf{P}$, τότε και $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \mathbf{P}$.

Αρχή της (δομικής) επαγωγής

- **Θεώρημα:** Κάθε πρόταση έχει την ιδιότητα Q εφόσον:
 - Κάθε ατομική πρόταση έχει την ιδιότητα Q .
 - Αν ϕ και ψ έχουν την ιδιότητα Q , τότε και $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)$ έχουν την ιδιότητα Q .

Αρχή της (δομικής) αναδρομής

- **Θεώρημα:** Υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση f ορισμένη πάνω στο σύνολο \mathbf{P} , τ.ω.∴
 - Η τιμή της f στις ατομικές προτάσεις ορίζεται ρητά.
 - Η τιμή της f σε προτάσεις της μορφής $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)$ ορίζεται με βάση τις τιμές $f(\phi)$ και $f(\psi)$.

Μοναδική Συντακτική Ανάλυση (Unique Parsing)

- **Θεώρημα:** Κάθε πρόταση ϕ υπάγεται ακριβώς σε μία από τις κατηγορίες:
 - Είναι ατομική πρόταση.
 - Είναι της μορφής $(\neg\psi)$, για μοναδική πρόταση ψ ,
 - Είναι της μορφής $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2 ,
 - Είναι της μορφής $(\psi_1 \vee \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2 ,
 - Είναι της μορφής $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2 ,
 - Είναι της μορφής $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, για μοναδικές ψ_1 και ψ_2 .

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (1)

- Η (κλασική) προτασιακή λογική είναι δίτιμη, με χώρο τιμών τις αληθοτιμές (truth values) **T** (αληθής) **F** (ψευδής): $\text{Tr} = \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}$.
- Ερμηνεύουμε τους προτασιακούς συνδέσμους χρησιμοποιώντας συναρτήσεις από το **Tr** στο **Tr**.
- $\neg : \text{Tr} \rightarrow \text{Tr}$ τ.ω.:
 - $(\mathbf{T}) = \mathbf{F}$, και
 - $(\mathbf{F}) = \mathbf{T}$, και

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (2)

- Για τους διμελείς συνδέσμους έχουμε στη διάθεσή μας $2^{2^2} = 16$ διμελείς συναρτήσεις από το **Tr** στο **Tr**.

Προτασιακή Λογική – Σημασιολογία (3)

		Λογικοί Σύνδεσμοι			
		\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Πίνακας αλήθειας

Πίνακας αλήθειας για $(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow ((\neg p_0) \wedge p_1)$

p_0	p_1	$p_0 \leftrightarrow p_1$	$\neg p_0$	$((\neg p_0) \wedge p_1)$	$(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow ((\neg p_0) \wedge p_1)$
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	F	F

Πλήρες σύνολο προτασιακών συνδέσμων

- Το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες σύνολο προτασιακών συνδέσμων, γιατί οι υπόλοιποι σύνδεσμοι μπορούν να οριστούν μέσω αυτών:
 - $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ως $\neg((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2))$
 - $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ ως $\neg(\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$
 - $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ ως $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

Απονομή αλήθειας (1)

- Απονομή αλήθειας (Boolean valuation) είναι κάθε συνάρτηση $V: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Tr}$ τ.ω.:
 - $V(\neg\phi) = \neg V(\phi)$
 - $V(\psi_1 \circ \psi_2) = V(\psi_1) \circ V(\psi_2)$, όπου \circ αντιστοιχεί στους διμελείς συνδέσμους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Απονομή αλήθειας (2)

- Πρόταση 1: Για κάθε συνάρτηση f από το σύνολο των ατομικών προτάσεων στο \mathbf{Tr} , υπάρχει απονομή αλήθειας που συμφωνεί με την f στις ατομικές προτάσεις.
- Πρόταση 2: Αν V_1 και V_2 είναι δύο απονομές αλήθειας που συμφωνούν σε κάθε ατομική πρόταση, τότε $V_1(\phi) = V_2(\phi)$ για κάθε πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$.

Ταυτολογίες

- Μια πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$ είναι **ταυτολογία (tautology)** αν $V(\phi) = \mathbf{T}$ για κάθε απονομή αλήθειας V .
- Το αν μια πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$ είναι ταυτολογία, είναι **αποκρίσιμο (decidable)**.
 - Για να αποκριθούμε **ναι** ή **όχι**, κατασκευάζουμε ένα πίνακα αλήθειας με 2^n γραμμές
 - Ο αλγόριθμος αυτός **δεν είναι αποδοτικός** γιατί δεν είναι **πολυωνυμικός**

Ικανοποιησιμότητα

- Ένα σύνολο Σ προτάσεων του \mathbf{P} είναι **ικανοποιήσιμο (satisfiable)** αν υπάρχει απονομή αλήθειας V , τ.ω. $V(\phi)=\mathbf{T}$ για κάθε $\phi \in \Sigma$.
- Θεώρημα 1: Μια πρόταση $\phi \in \mathbf{P}$ είναι ταυτολογία ανν η πρόταση $\neg\phi$ είναι μη ικανοποιήσιμη.

Θεωρήματα Αντικατάστασης (1)

- Έστω πρόταση ϕ που περιέχει την ατομική πρόταση p . Γράφουμε $\phi(p \mid \psi)$ για να δηλώσουμε την πρόταση που προκύπτει από την ϕ αν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της p με την πρόταση ψ .
- **Θεώρημα Αντικατάστασης 1:** Έστω προτάσεις ψ_1 και ψ_2 απονομή αλήθειας V . Αν $V(\psi_1) = V(\psi_2)$, τότε $V(\phi(p \mid \psi_1)) = V(\phi(p \mid \psi_2))$.

Θεωρήματα Αντικατάστασης (2)

- Θεώρημα Αντικατάστασης 2: Αν $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ είναι ταυτολογία, τότε $\phi(p \mid \psi_1) \leftrightarrow \phi(p \mid \psi_2)$ είναι ταυτολογία.

Κανονικές μορφές (1)

- **Αρνητική κανονική μορφή:** μια πρόταση ϕ είναι σε αρνητική κανονική μορφή αν όλες οι αρνήσεις (\neg) στη ϕ εμφανίζονται μπροστά από **ατομικές προτάσεις**.
- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρνητική κανονική μορφή. Υπάρχει αλγόριθμος με τον οποίο μια πρόταση ϕ μπορεί να μετατραπεί σε μια πρόταση ψ σε αρνητική κανονική μορφή, έτσι ώστε $\phi \leftrightarrow \psi$ να είναι ταυτολογία.
 - Παράδειγμα: $\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow ((\neg p_0) \vee (\neg p_1))$

Κανονικές μορφές (2)

- Προσημασμένη ατομική πρόταση (literal): είναι είτε μια ατομική πρόταση είτε η άρνηση μίας ατομικής πρότασης.
- Απλή πρόταση (clause): είναι μια διάζευξη $(l_0 \vee l_1 \vee \dots \vee l_n)$ όπου κάθε όρος είναι προσημασμένη ατομική πρόταση.
- Δυϊκή απλή πρόταση (dual clause): είναι μια σύζευξη $(l_0 \wedge l_1 \wedge \dots \wedge l_n)$ όπου κάθε όρος είναι προσημασμένη ατομική πρόταση.

Κανονικές μορφές (3)

- Συζευκτική κανονική μορφή (conjunctive normal form ή clause form): μία πρόταση ϕ είναι σε συζευκτική κανονική μορφή αν είναι στη μορφή $(c_0 \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_n)$, όπου κάθε όρος είναι απλή πρόταση.
- Διαζευκτική κανονική μορφή (disjunctive normal form): μία πρόταση ϕ είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή αν είναι στη μορφή $(d_0 \vee d_1 \vee \dots \vee d_n)$, όπου κάθε όρος είναι δυϊκή απλή πρόταση.

Κανονικές μορφές (4)

- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε συζευκτική κανονική μορφή.
- Κάθε πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαζευκτική κανονική μορφή.

Σημασιολογικά ταμπλό (1) – Κανόνες ανάπτυξης ταμπλό

$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$	$\frac{\psi_1\wedge\psi_2}{\psi_1}$ ψ_2	$\frac{\neg(\psi_1\vee\psi_2)}{\neg\psi_1}$ $\neg\psi_2$	$\frac{\neg(\psi_1\rightarrow\psi_2)}{\psi_1}$ $\neg\psi_2$
$\frac{\psi_1\vee\psi_2}{\psi_1 \mid \psi_2}$	$\frac{\neg(\psi_1\wedge\psi_2)}{\neg\psi_1 \mid \neg\psi_2}$	$\frac{\psi_1\rightarrow\psi_2}{\neg\psi_1 \mid \psi_2}$	

Σημασιολογικά ταμπλό (2)

- Το ταμπλό είναι **αρνητικό (refutation)** αποδεικτικό σύστημα, δηλ., για να αποδείξουμε ότι η πρόταση ϕ είναι ταυτολογία, ξεκινάμε με την πρόταση $\neg\phi$, προσπαθώντας να καταλήξουμε σε αντίφαση.

Σημασιολογικά ταμπλό (3)

- Ένα κλαδί του ταμπλό είναι **κλειστό** αν περιέχει την πρόταση ϕ και την πρόταση $\neg\phi$.
- Ένα ταμπλό είναι **κλειστό** αν κάθε κλαδί του είναι **κλειστό**.
- Μια **απόδειξη** ταμπλό για την πρόταση ϕ είναι ένα κλειστό ταμπλό για την πρόταση $\neg\phi$.
- Για να δείξουμε ότι υπάρχει απόδειξη ταμπλό για την πρόταση ϕ γράφουμε $\vdash_t \phi$.

Σημασιολογικά ταμπλό (4)

(1)	$\neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \vee p_4) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4))$		
(2-1)	$p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$		
(3-1)	$\neg((p_1 \vee p_4) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4))$		
(4-3)	$p_1 \vee p_4$		
(5-3)	$\neg((p_2 \rightarrow p_3) \vee p_4)$		
(6-5)	$\neg(p_2 \rightarrow p_3)$		
(7-5)	$\neg p_4$		
(8-2)	$\neg p_1$	(9-2)	$p_2 \rightarrow p_3$
(10-4)	p_1	(11-4)	p_4

Σημασιολογικά ταμπλό (5)

- Γενικά οι αποδείξεις ταμπλό είναι συντομότερες από τον πίνακα αλήθειας.
 - Παράδειγμα: η πρόταση $\phi \vee \neg\phi$.
- Οι κανόνες ταμπλό είναι **μη ντετερμινιστικοί (μη αιτιοκρατικοί)** αν, δηλ., εμείς αποφασίζουμε ποια πρόταση να αναπτύξουμε και από ποιο κλαδί.
- Ένα ταμπλό χαρακτηρίζεται ως **αυστηρό (strict)**, αν κατά την κατασκευή του καμία πρόταση δεν αναπτύχθηκε πάνω από μία φορά σε κάθε κλαδί.

Επίλυση (Resolution) (1)

- Η επίλυση, όπως και τα ταμπλό, είναι **αρνητικό (refutation)** αποδεικτικό σύστημα, δηλ., για να αποδείξουμε ότι η πρόταση ϕ είναι ταυτολογία, ξεκινάμε με την πρόταση $\neg\phi$, προσπαθώντας να καταλήξουμε σε αντίφαση.

Επίλυση (Resolution) (2)

- Δουλεύουμε με προτάσεις που βρίσκονται σε συζευκτική κανονική μορφή.
- Τώρα όμως γράφουμε τις clauses ως σύνολα:
Αντί για $(l_0 \vee l_1 \vee \dots \vee l_n)$, γράφουμε $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$.
 - Π.χ.: αντί για $(p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2)$, γράφουμε $\{p_0, \neg p_1, \neg p_2\}$.
 - Βελτίωση αντί για $(p_0 \vee \neg p_1 \vee p_0)$, γράφουμε $\{p_0, \neg p_1\}$.

Επίλυση (Resolution) (3)

- Η κενή clause συμβολίζεται ως \square .
- Ισχύει ότι $V(\square) = F$ για κάθε απονομή αλήθειας V , δηλ., η κενή clause είναι μη ικανοποιήσιμη.
- Άρα, αν κατά την ανάπτυξη ενός τύπου (σε συζευκτική κανονική μορφή) με βάση τον κανόνα της επίλυσης, προκύψει η \square , τότε ο τύπος είναι **μη ικανοποιήσιμος**.

Resolution Principle (Κανόνας Επίλυσης)

- Έστω C_1 και C_2 δύο clauses τ.ω. το literal X να εμφανίζεται στην C_1 και το $\neg X$ στην C_2 . Η clause C που προκύπτει ως εξής:
 1. Διαγράφουμε όλες τις εμφανίσεις του X από την C_1 ,
 2. Διαγράφουμε όλες τις εμφανίσεις του $\neg X$ από την C_2 ,
 3. Ενώνουμε τις δύο διαζεύξεις που προκύπτουν.είναι το αποτέλεσμα της επίλυσης των C_1 και C_2 με βάση το literal X .

Επίλυση (Resolution) (5)

- Παραδείγματα:
 - Αν $C_1 = \{p, \neg q, r\}$ και $C_2 = \{\neg p, s, t\}$, η επίλυση ως προς p δίνει την $C = \{\neg q, r, s, t\}$.
 - Αν $C_1 = \{p\}$ και $C_2 = \{\neg p\}$, η επίλυση ως προς p δίνει την $C = \square$.

Επίλυση (Resolution) (6)

- Ο τύπος $(p_0 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_0 \leftrightarrow \neg p_2)$ είναι μη ικανοποιήσιμος.
- Ο παραπάνω τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή γίνεται:
 $\{\{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}, \{p_0, p_1\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{p_0, \neg p_1\}, \{p_0, \neg p_2\}, \{\neg p_0, \neg p_2\}, \{\neg p_0, p_2\}\}$
- Με χρήση του κανόνα της επίλυσης προκύπτουν διαδοχικά:

(1) $\{p_0\}$, από $\{p_0, p_1\}$ και $\{p_0, \neg p_1\}$

(2) $\{\neg p_0, \neg p_1\}$, από $\{\neg p_0, \neg p_1, p_2\}$ και $\{\neg p_0, \neg p_2\}$

(3) $\{\neg p_0\}$, από $\{\neg p_0, \neg p_1\}$ και $\{\neg p_0, p_1\}$

(4) \square , από $\{p_0\}$ και $\{\neg p_0\}$

Επίλυση (Resolution) (7)

- Μια ανάπτυξη ενός τύπου (με βάση τον κανόνα της επίλυσης) είναι **κλειστή** αν περιέχει την \square .
- Μια **απόδειξη** με τον κανόνα της επίλυσης για την πρόταση ϕ είναι μια κλειστή ανάπτυξη για την πρόταση $\neg\phi$.
- Για να δείξουμε ότι υπάρχει απόδειξη με επίλυση για την πρόταση ϕ γράφουμε $\vdash_r \phi$.

Ορθότητα (Soundness) (1)

- Ένα σύνολο Σ προτάσεων είναι **ικανοποιήσιμο (satisfiable)** αν υπάρχει απονομή αλήθειας V , τ.ω. $V(\phi)=\mathbf{T}$ για κάθε $\phi \in \Sigma$.
- Ένα κλαδί θ ενός ταμπλό είναι **ικανοποιήσιμο (satisfiable)** αν υπάρχει απονομή αλήθειας V , τ.ω. $V(\phi)=\mathbf{T}$ για κάθε $\phi \in \theta$.
- Ένα ταμπλό είναι **ικανοποιήσιμο (satisfiable)** αν έχει ένα τουλάχιστο ικανοποιήσιμο κλαδί.

Ορθότητα (Soundness) (2)

- Πρόταση 1: Κάθε εφαρμογή κανόνα ταμπλό σε ένα ικανοποιήσιμο ταμπλό, οδηγεί σε ικανοποιήσιμο ταμπλό.
- Πρόταση 2: Αν ένα σύνολο προτάσεων Σ έχει κλειστό ταμπλό, τότε είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Θεώρημα: Αν ο τύπος ϕ έχει απόδειξη ταμπλό, τότε είναι **ταυτολογία**.

Ορθότητα (Resolution) (3)

- Πρόταση 1: Κάθε εφαρμογή κανόνα του κανόνα της επίλυσης σε μια ικανοποιήσιμη ανάπτυξη ενός τύπου (με βάση τον κανόνα της επίλυσης) οδηγεί σε ικανοποιήσιμη ανάπτυξη.
- Πρόταση 2: Αν ένα σύνολο προτάσεων Σ έχει κλειστή ανάπτυξη (με βάση τον κανόνα της επίλυσης), τότε είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Θεώρημα: Αν ο τύπος ϕ έχει απόδειξη με επίλυση, τότε είναι **ταυτολογία**.

Πρωτοβάθμια Κατηγορηματική Λογική (1)

- Το αλφάβητο της γλώσσας – «λογικά» σύμβολα:
 - Ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο από μεταβλητές: x_0, x_1, x_2, \dots
(Στην πράξη θα γράφουμε x, y, z , κλπ.)
 - Οι προτασιακοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \perp$.
 - Οι παρενθέσεις $(,)$.