



**ΘΑΛΗΣ - Πανεπιστήμιο Πειραιά**  
**Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της**  
**ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων**  
**με πολλαπλά κριτήρια**

**Δ5 – Βιβλιογραφική ανασκόπηση**  
**προσεγγίσεων τεχνικής νοημοσύνης για την**  
**ανάλυση ευστάθειας πολυκριτήριων**  
**προβλημάτων**

**Π5 – Τεχνική έκθεση (βιβλιογραφική**  
**ανασκόπηση συνδυασμού μεθόδων τεχνητής**  
**νοημοσύνης και πολυκριτήριας ανάλυσης)**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**  
**ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΚΡΗΤΗΣ**



**ΕΘΝΙΚΟ**  
**ΜΕΤΣΟΒΙΟ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

## Στοιχεία παραδοτέου

**Δράση:** Δ5 – Βιβλιογραφική ανασκόπηση προσεγγίσεων τεχνικής νοημοσύνης για την ανάλυση ευστάθειας πολυκριτήριων προβλημάτων

**Τίτλος παραδοτέου:** Π5 – Τεχνική έκθεση (βιβλιογραφική ανασκόπηση συνδυασμού μεθόδων τεχνητής νοημοσύνης και πολυκριτήριας ανάλυσης)

**Τύπος παραδοτέου:** S - PU

**Έκδοση:** 01

**Ημερομηνία:** 1 Ιουνίου 2012

**Υπεύθυνος σύνταξης:** Καθηγητής Κωνσταντίνος Ζοπουνίδης

**Ομάδα σύνταξης:** Καθηγητής Νικόλαος Ματσατσίνης  
Επίκουρος Καθηγητής Μιχάλης Δούμπος

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή .....	5
2	Ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων .....	7
3	Παράγοντες ευστάθειας.....	10
4	Μεθοδολογικές προσεγγίσεις στα πλαίσια της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης .	12
4.1	Διερεύνηση του συνόλου των εφικτών παραμέτρων ενός μοντέλου απόφασης..	12
4.2	Διαμόρφωση ευσταθών αποτελεσμάτων.....	13
4.3	Επιλογή ενός ευσταθούς μοντέλου απόφασης .....	13
5	Η συμβολή της τεχνητής νοημοσύνης .....	14
5.1	Στατιστική θεωρία μάθησης .....	14
5.2	Ευστάθεια μηχανών μάθησης.....	15
5.3	Εφαρμογές στην ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων.....	19
6	Συμπεράσματα και μελλοντικές ερευνητικές κατευθύνσεις.....	22
	Βιβλιογραφία .....	23

### **Συνομογραφίες Παραδοτέου**

**ΠΑΑ:** Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων

**TN:** Τεχνητή Νοημοσύνη

**ΑΣΠ:** Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση

## 1 Εισαγωγή

Η πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων (ΠΑΑ, multicriteria decision aid) αποτελεί έναν εξελιγμένο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας, ο οποίος έχει γνωρίσει ιδιαίτερη άνθηση τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο (Zeleny, 1982, Vincke, 1992). Ο κύριος παράγοντας που έχει συμβάλει στην ανάπτυξη της ΠΑΑ μπορεί να εντοπιστεί στην αυξημένη πολυπλοκότητα των σύγχρονων προβλημάτων λήψης αποφάσεων που αντιμετωπίζουν επιχειρήσεις και οργανισμοί. Η ανάγκη συνεκτίμησης πολλαπλών τεχνικών, οικονομικών, περιβαλλοντικών και κοινωνικών στόχων, κριτηρίων και περιορισμών, δημιουργεί ένα εξαιρετικά σύνθετο πλαίσιο. Ταυτόχρονα, η ύπαρξη πολλαπλών εμπλεκόμενων με διαφορετικά συμφέροντα, ο αυξανόμενος βαθμός αβεβαιότητας, και η διαθεσιμότητα (σε πολλές περιπτώσεις) εξαιρετικά μεγάλου όγκου δεδομένων σε πραγματικό χρόνο περιπλέκουν ακόμη περισσότερο τις συνθήκες υπό τις οποίες λαμβάνονται αποφάσεις σε στρατηγικό και λειτουργικό επίπεδο.

Η ΠΑΑ συμβάλει ουσιαστικά την αντιμετώπιση σύνθετων και κακώς δομημένων προβλημάτων λήψης αποφάσεων, τα οποία απαιτούν την συνεκτίμηση πολλαπλών (αντικρουόμενων) κριτηρίων. Μεταξύ άλλων η έρευνα στο πεδίο της ΠΑΑ επικεντρώνεται σε θέματα όπως η δόμηση και μοντελοποίηση πολύπλοκων προβλημάτων λήψης αποφάσεων, η ανάπτυξη μοντέλων σύνθεσης πολλαπλών κριτηρίων, η ανάλυση της πολιτικής λήψης αποφάσεων του αποφασίζοντα, η μελέτη της ανταγωνιστικής φύσης των κριτηρίων, κ.ά. Απώτερος στόχος είναι η παροχή των απαραίτητων πληροφοριών για την υποστήριξη της διαδικασίας λήψης των αποφάσεων, συμβάλλοντας στον εντοπισμό των βασικών χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου προβλήματος καθώς και των ιδιαιτεροτήτων των διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων.

Κάθε διαδικασία που αναπτύσσεται στα πλαίσια της ΠΑΑ (όπως και κάθε άλλη μορφή μοντελοποίησης ενός προβλήματος), απαιτεί την υιοθέτηση κάποιων παραδοχών και υποθέσεων για τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και την πραγματοποίηση εκτιμήσεων για ένα σύνολο παραμέτρων που προσδιορίζουν τον τρόπο με τον οποίο συνθέτονται τα κριτήρια. Τα στοιχεία όμως αυτά εμπεριέχουν αβεβαιότητες, ασάφειες, και σφάλματα, χαρακτηριστικά τα οποία είναι απόλυτα συνυφασμένα με την πολυπλοκότητα των σύγχρονων προβλημάτων. Είναι λοιπόν συνηθισμένο φαινόμενο να απαιτούνται σημαντικές τροποποιήσεις της μοντελοποίησης όταν υπάρχουν μικρές αλλαγές του πλαισίου της απόφασης (μεταβολές στα δεδομένα, τις απαιτήσεις/στόχους/περιορισμούς). Επιπλέον, συχνά οι λύσεις που επιλέγονται ως ικανοποιητικές στη φάση του σχεδιασμού και ανάλυσης ενός προβλήματος, παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα στο στάδιο της πρακτικής εφαρμογής, λόγω των διαφοροποιήσεων που διαπιστώνονται (εκ των υστέρων) μεταξύ της

μοντελοποίησης και των πραγματικών χαρακτηριστικών του προβλήματος. Μέσα στο πλαίσιο αυτό, η ανάλυση ευστάθειας (robustness analysis) είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα στο χώρο της ΠΑΑ. Η ανάλυση ευστάθειας αποσκοπεί στην αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων, προωθώντας μια νέα θεώρηση σύμφωνα με την οποία μια λύση/απόφαση είναι ικανοποιητική όχι όταν ανταποκρίνεται ικανοποιητικά σε ένα συγκεκριμένο και αυστηρά καθορισμένο σύνολο παραδοχών/υποθέσεων/ εκτιμήσεων, αλλά εάν παραμένει ικανοποιητική ακόμα και όταν η αξιολόγησή της βασιστεί σε ένα διαφορετικό πλαίσιο (Roy, 2010, Vetschera et al., 2010, Vincke, 1999).

Το θέμα της ανάλυσης ευστάθειας έχει αρχίσει να κεντρίζει το ενδιαφέρον των ερευνητών του χώρου της ΠΑΑ. Ταυτόχρονα, το θέμα της ανάλυσης ευστάθειας έχει αποτελέσει αντικείμενο αναλυτικής έρευνας σε άλλα πεδία όπως αυτά της επιχειρησιακής έρευνας και της τεχνητής νοημοσύνης (ΤΝ). Η παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση επικεντρώνεται στην ανάλυση της σχέσης ανάμεσα σε τεχνικές ΠΑΑ και μεθοδολογίες από το πεδίο της ΤΝ, καθώς και του τρόπου με τον οποίο η ευστάθεια αντιμετωπίζεται στα δύο πεδία. Η καταγραφή αυτή συμβάλει στον εντοπισμό συνεργειών που μπορούν να προκύψουν από την ανάπτυξη διαδικασιών που συνδυάζουν ιδέες, έννοιες και αρχές από τα πεδία της ΠΑΑ και της ΤΝ για την καλύτερη μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση πραγματοποιείται στα πλαίσια διαδικασιών ανάπτυξης μοντέλων αποφάσεων μέσω της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης (preference disaggregation approach, Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001) της ΠΑΑ, η οποία όπως θα αναλυθεί έχει σημαντικά κοινά στοιχεία με τεχνικές από το χώρο της ΤΝ και ιδιαίτερα με μεθοδολογίες μηχανικής μάθησης (machine learning).

## 2 Ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων

Η ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων λήψης αποφάσεων μπορεί να επιτευχθεί μέσω δύο εναλλακτικών προσεγγίσεων. Στην πρώτη ακολουθείται μια «εμπρόσθια» αλληλεπιδραστική διαδικασία κατά την οποία ο αναλυτής εκμαιεύει πληροφορίες για το σύστημα αξιών του αποφασίζοντας, οι οποίες στη συνέχεια διαμορφώνουν το μοντέλο απόφασης. Οι πληροφορίες αυτές μπορούν να αφορούν τη σχετική σημαντικότητα των κριτηρίων αξιολόγησης, παραχωρήσεις που είναι διατεθειμένος να κάνει ο αποφασίζοντας στα κριτήρια, τιμές-όρια (κατώφλια) των κριτηρίων που αντιστοιχούν σε κρίσιμα στοιχεία των εναλλακτικών, κλπ. Η προσέγγιση αυτή είναι εφαρμόσιμη κυρίως σε περιπτώσεις όπου ο αποφασίζοντας είναι διατεθειμένος να αφιερώσει το χρόνο που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί αυτή η αλληλεπιδραστική διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου.

Αντίθετα, στην αναλυτική-συνθετική προσέγγιση (ΑΣΠ) ακολουθείται μια «ανάστροφη» διαδικασία. Ειδικότερα, στην ΑΣΠ χρησιμοποιούνται διαδικασίες παλινδρόμησης για τη διαμόρφωση ενός μοντέλου που είναι σύμφωνο με ένα σύνολο παραδειγμάτων αποφάσεων (σύνολο αναφοράς). Τα παραδείγματα αυτά παρέχονται από τον αποφασίζοντα ως αξιολογήσεις ενδεικτικές της πολιτικής και του συστήματος αξιών που τον χαρακτηρίζει. Τα παραδείγματα του συνόλου αναφοράς μπορούν να αφορούν ένα υποσύνολο των υπό αξιολόγηση εναλλακτικών, παραδείγματα παλαιότερων αποφάσεων ή ενδεικτικές αξιολογήσεις σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις «εικονικών» εναλλακτικών (τεχνητά δεδομένα). Εφόσον διαμορφωθεί ένα μοντέλο που περιγράφει με ικανοποιητική ακρίβεια τα παραδείγματα του συνόλου αναφοράς, αυτό μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση οποιασδήποτε εναλλακτικής επιλογής.

Ειδικότερα, έστω ως  $\mathcal{X}$  συμβολίζεται η αξιολόγηση από τον αποφασίζοντα των εναλλακτικών ενός συνόλου αναφοράς  $X$ , οι οποίες περιγράφονται από ένα σύνολο  $n$  κριτηρίων. Στο εξής ως  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  θα συμβολίζεται το διάνυσμα με τις τιμές των κριτηρίων για την εναλλακτική  $i$ . Η αξιολόγηση των εναλλακτικών πραγματοποιείται ανάλογα με τον χαρακτήρα (προβληματική) του προβλήματος και μπορεί να εκφραστεί με τους ακόλουθους τρόπους:

- Κατάταξη των εναλλακτικών από την καλύτερη προς τη χειρότερη.
- Ταξινόμηση σε προκαθορισμένες κατηγορίες επίδοσης (άριστες, πολύ καλές, μέτριες, κοκ.)
- Διμερείς συγκρίσεις των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς σε ζεύγη.

Σε κάθε περίπτωση θεωρείται ότι ο αποφασίζοντας χρησιμοποιεί (ασυνείδητα) κάποιο μοντέλο απόφασης  $f_\beta$  το οποίο καθορίζεται από ένα σύνολο παραμέτρων  $\beta$  που συνδέεται άμεσα με την πολιτική λήψης αποφάσεων που ακολουθεί. Οι δύο πλέον διαδεδομένοι τύποι μοντέλων στην ΠΑΑ είναι οι ακόλουθοι:

- Συναρτήσεις αξιών (value functions): Μια συνάρτηση αξιών  $V$  συνδυάζει όλα τα κριτήρια αξιολόγησης σε ένα σύνθετο δείκτη, έτσι ώστε:

$$V(\mathbf{x}_i) > V(\mathbf{x}_j) \Leftrightarrow \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j \quad (\text{η εναλλακτική } i \text{ προτιμάται της } j)$$

$$V(\mathbf{x}_i) = V(\mathbf{x}_j) \Leftrightarrow \mathbf{x}_i \sim \mathbf{x}_j \quad (\text{οι εναλλακτικές } i \text{ και } j \text{ είναι ισοδύναμες})$$

Στην πιο απλή περίπτωση μια συνάρτηση αξίας μπορεί να εκφραστεί σε προσθετική μορφή ως εξής:

$$V(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n w_j v_j(x_{ij})$$

όπου  $w_j \geq 0$  είναι ο συντελεστής παραχώρησης του κριτηρίου  $j$  ( $w_1 + \dots + w_n = 1$ ) και  $v_j$  είναι η συνάρτηση μερικής αξίας του κριτηρίου  $j$ . Το σύνολο των παραμέτρων ενός τέτοιου μοντέλου περιλαμβάνει του συντελεστές παραχώρησης καθώς και τη μορφή των συναρτήσεων μερικής αξίας. Το βιβλίο των Keeney and Raiffa (1993) παρουσιάζει αναλυτικά το θεωρητικό πλαίσιο που χαρακτηρίζει μοντέλα αποφάσεων αυτής της μορφής.

- Σχέσεις υπεροχής (outranking relations): Ως σχέση υπεροχής  $S$  ορίζεται μια διμερής σχέση τέτοια ώστε  $\mathbf{x}_i S \mathbf{x}_j$  εάν και μόνο εάν η εναλλακτική  $i$  είναι εξίσου καλή όσο η εναλλακτική  $j$ . Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι μέσω των οποίων μπορεί να διαμορφωθεί και να χρησιμοποιηθεί η σχέση υπεροχής (Brans and Mareschal, 2005, Figueira et al., 2005). Οι παράμετροι τέτοιων μοντέλων περιλαμβάνουν τη σημαντικότητα των κριτηρίων αξιολόγησης καθώς και συμπληρωματικά στοιχεία που τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούνται οι διμερείς συγκρίσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια.

Ανάλογα με τον τύπο του μοντέλου που χρησιμοποιείται στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου προβλήματος λήψης αποφάσεων, σκοπός της ΑΣΠ είναι ο βέλτιστος καθορισμός των παραμέτρων  $\hat{\beta}^*$  αξιοποιώντας την πληροφορία που παρέχει το σύνολο αναφοράς  $\mathcal{X}$ , έτσι ώστε η εκτίμηση που θα διαμορφωθεί να συμφωνεί με την πολιτική του αποφασίζοντα όπως αυτή αναπαριστάται στις πραγματικές (αλλά άγνωστες) τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Δηλαδή:

$$\hat{\beta}^* = \arg \min_{\beta \in \mathcal{X}} \|\hat{\beta} - \beta\|_p \quad (1)$$



όπου  $\|\hat{\beta} - \beta\|_p$  είναι η  $p$ -νόρμα των διαφορών μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμωμένων παραμέτρων του μοντέλου και  $\mathcal{X}$  είναι το σύνολο των εφικτών τιμών για τις παραμέτρους του μοντέλου, ο οποίο ορίζεται βάζει των αξιολογήσεων του αποφασίζοντα για τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς.

Δεδομένου όμως ότι οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου δεν είναι γνωστές, το πρόβλημα (1) δεν μπορεί να λυθεί άμεσα. Αντί αυτού διαμορφώνεται εναλλακτικά μια εμπειρική εκτίμηση βάσει των αξιολογήσεων του αποφασίζοντα για τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς  $\mathcal{X}$  :

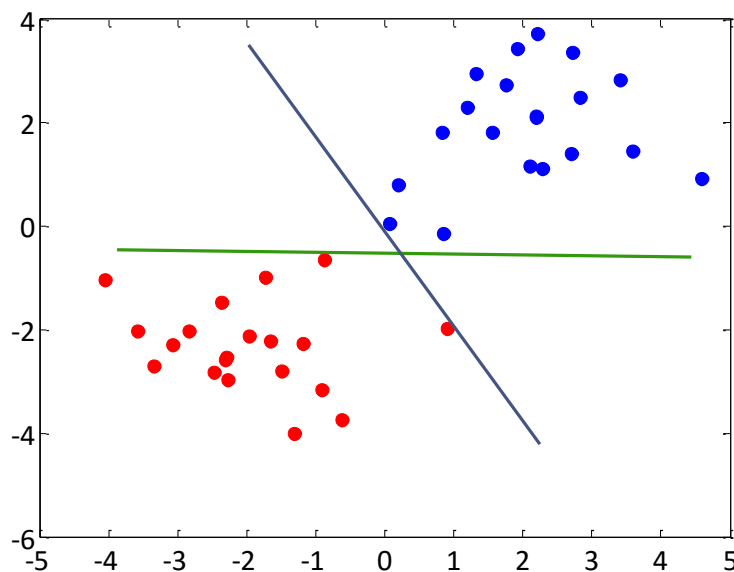
$$\hat{\beta}^* = \arg \min_{\hat{\beta} \in \mathcal{X}} L(\mathcal{Y}_X, \mathcal{Y}_X) \quad (2)$$

όπου  $\mathcal{Y}_X$  είναι οι αξιολογήσεις των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς βάσει του μοντέλου  $f_{\hat{\beta}}$  και  $L(\cdot)$  είναι μια συνάρτηση των αποκλίσεων μεταξύ των αξιολογήσεων του αποφασίζοντα  $\mathcal{Y}_X$  και του μοντέλου  $\mathcal{Y}_X$ . Το πρόβλημα (2) μπορεί να λυθεί μέσω κατάλληλων διαδικασιών βελτιστοποίησης εφόσον οριστεί η μορφή του μοντέλου καθώς και της συνάρτησης σφάλματος  $L$ .

### 3 Παράγοντες ευστάθειας

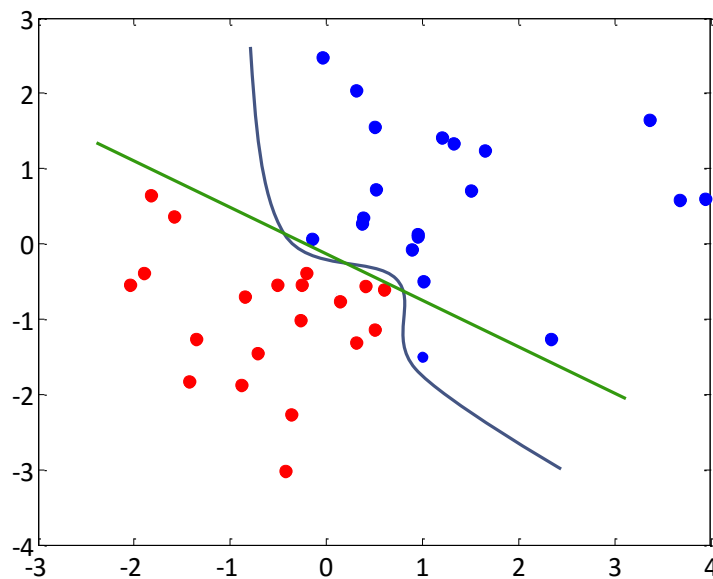
Η ποιότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος (2) είναι καθοριστικής σημασίας για την υποστήριξη των αποφάσεων στα πλαίσια της ΑΣΠ. Η ποιότητα των αποτελεσμάτων προσδιορίζεται τόσο από την ακρίβεια των προτάσεων που διαμορφώνονται όσο και από την ευστάθειά τους. Η ευστάθεια των αναλύσεων στο πλαίσιο της ΑΣΠ προσδιορίζεται τόσο από το εύρος του συνόλου  $\mathcal{X}$  που ορίζει τις εφικτές επιλογές για τις παραμέτρους του μοντέλου, όσο και τον τρόπο με τον οποίο διατυπώνεται και λύνεται το πρόβλημα (2). Παρακάτω αναλύονται τρεις από τους σημαντικότερους παράγοντες που προσδιορίζουν την ευστάθεια των αποτελεσμάτων.

- *Υπαρξη πολλαπλών βέλτιστων λύσεων*: όπως σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης, έτσι και στην περίπτωση του προβλήματος (2) είναι πιθανό να υπάρχουν πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. Έστω, για παράδειγμα, το πρόβλημα ταξινόμησης του Σχήματος 3.1. Στο παράδειγμα αυτό έχουν οι εναλλακτικές περιγράφονται από δύο κριτήρια (διαστάσεις) και έχουν ταξινομηθεί σε ως αποδεκτές (μπλε περιοχή) και μη αποδεκτές (κόκκινη περιοχή). Οι δύο περιοχές δεν επικαλύπτονται και επομένως υπάρχουν πολλά διαφορετικά μοντέλα απόφασης που περιγράφουν με ακρίβεια την ταξινόμηση των εναλλακτικών (στο σχήμα ως ευθείες γραμμές παρουσιάζονται δύο χαρακτηριστικά γραμμικά μοντέλα απόφασης).



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα πολλαπλών βέλτιστων λύσεων σε ένα πρόβλημα ταξινόμησης

- *Πολυπλοκότητα μοντέλου*: η διαμόρφωση και λύση του προβλήματος (2) προαπαιτεί τον καθορισμό της γενικής μορφής του μοντέλου απόφασης. Τα απλούστερα γραμμικά μοντέλα είναι γενικά πιο ευσταθή σε σχέση με πιο σύνθετα μη γραμμικά μοντέλα, αλλά πολλές φορές δεν είναι σε θέση να αναπαραστήσουν με ακρίβεια τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα. Στο παράδειγμα του Σχήματος 3.2, η χρήση ενός γραμμικού μοντέλου ταξινόμησης οδηγεί σε εκτιμήσεις ικανοποιητικής ευστάθειας, ενώ αντίθετα η χρήση ενός μη γραμμικού διαχωριστικού ορίου δίνει ασταθή αποτελέσματα.



Σχήμα 3.2: Μοντελοποίηση ενός προβλήματος ταξινόμησης με μοντέλα απόφασης διαφορετικής πολυπλοκότητας

- *Επάρκεια συνόλου αναφοράς*: η επάρκεια του συνόλου αναφοράς έχει άμεση σχέση με τα δύο θέματα που προαναφέρθηκαν. Στο παράδειγμα του Σχήματος 2 τα διαθέσιμα δεδομένα του συνόλου αναφοράς παρέχουν επαρκή πληροφορία για την ανάπτυξη ενός γραμμικού μοντέλου απόφασης, αλλά όχι ενός μη γραμμικού μοντέλου. Επιπλέον, στοιχεία όπως η ύπαρξη ακραίων τιμών, ακόμα και οι συσχετίσεις των κριτηρίων που περιγράφουν τις επιδόσεις των εναλλακτικών επίσης επηρεάζουν την επάρκεια των δεδομένων. Η επίδραση της σχέσης μεταξύ των χαρακτηριστικών του συνόλου αναφοράς και της ευστάθειας και ακρίβειας μοντέλων αποφάσεων που αναπτύσσονται μέσω διαδικασιών ΑΣΠ αναλύθηκε στην έρευνα των Vetschera et al. (2010).

## 4 Μεθοδολογικές προσεγγίσεις στα πλαίσια της αναλυτικής- συνθετικής προσέγγισης

Στα πλαίσια της ΑΣΠ έχουν αναπτυχθεί τρεις κύριες κατευθύνσεις για τη μελέτη της ευστάθειας. Η πρώτη αφορά τη διερεύνηση του συνόλου των εφικτών λύσεων των παραμέτρων του μοντέλου απόφασης, η δεύτερη επικεντρώνεται στη διαμόρφωση ευσταθών προτάσεων γενικής μορφής, ενώ τέλος η τρίτη κατεύθυνση αφορά διαδικασίες διαμόρφωσης του προβλήματος (2) ώστε η λύση του να διασφαλίσει τη διαμόρφωση ευσταθών αποτελεσμάτων αξιολόγησης. Στις ενότητες που ακολουθούν αναλύονται τα βασικά σημεία των δύο αυτών διαφορετικών οπτικών καθώς και ορισμένες χαρακτηριστικές μεθοδολογίες.

### 4.1 Διερεύνηση του συνόλου των εφικτών παραμέτρων ενός μοντέλου απόφασης

Οι αξιολογήσεις του αποφασίζοντα για τις συνόλου αναφοράς διαμορφώνουν ένα χώρο λύσεων ως προς τις αποδεκτές παραμέτρους του μοντέλου απόφασης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μοντέλων αποφάσεων που είναι γραμμικά ως προς τις παραμέτρους τους (όπως ο σταθμισμένος μέσος όρος ή μια προσθετική συνάρτηση αξίας), το πεδίο των αποδεκτών λύσεων αντιστοιχεί σε ένα πολύεδρο σε  $K$  διατάξεις, όπου  $K$  είναι το πλήθος των παραμέτρων του μοντέλου. Καθώς αυξάνει το εύρος (όγκος) του χώρου των λύσεων αυξάνεται και η ευστάθεια των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, εντός του χώρου αυτού θα πρέπει να βρεθούν κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους του μοντέλου που να οδηγούν σε ευσταθείς προτάσεις. Η διερεύνηση λοιπόν του συνόλου των εφικτών παραμέτρων του μοντέλου απόφασης με βάση τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς συμβάλει στη μελέτη της ευστάθειας στα πλαίσια της ΑΣΠ.

Οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό περιλαμβάνουν αναλυτικές τεχνικές, τεχνικές προσομοίωσης και ευρετικές μεθοδολογίες. Στις αναλυτικές τεχνικές περιλαμβάνονται διαδικασίες για τον εντοπισμό του συνόλου των κορυφών που περιγράφουν πλήρως το χώρο των εφικτών λύσεων (Avis and Fukuda, 1992) καθώς και τεχνικές για τον υπολογισμό του όγκου του χώρου των εφικτών λύσεων (Vetschera, 1997), ο οποίος εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί και μέσω προσομοίωσης (Tervonen et al., 2012). Κύριο μειονέκτημα αυτών των μεθοδολογιών αποτελεί ο υψηλός υπολογιστικός τους φόρτος. Το πρόβλημα αυτό περιορίζεται μέσω ευρετικών τεχνικών (Siskos and Grigoroudis,

2010), οι οποίες περιορίζουν το εύρος αναζήτησης μόνο σε ένα περιορισμένο σύνολο ενδεικτικών εναλλακτικών μοντέλων απόφασης.

## 4.2 Διαμόρφωση ευσταθών αποτελεσμάτων

Εναλλακτικά της διερεύνησης του συνόλου των παραμέτρων του μοντέλου που συμφωνούν με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντα για τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς, μια άλλη προσέγγιση του θέματος της ευστάθειας στην ΑΣΠ είναι η ανάπτυξη μεθοδολογιών με έμφαση όχι στις παραμέτρους αλλά στα αποτελέσματα των μοντέλων αποφάσεων. Οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό επικεντρώνονται συνήθως στη διαμόρφωση ενός εύρους διαφορετικών προτάσεων για την αξιολόγηση των εναλλακτικών, καθώς και στην παροχή των αποτελεσμάτων σε ασαφή μορφή αντί της παροχής μιας συγκεκριμένης σαφούς αξιολόγησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο καθορισμός του συνόλου των εφικτών αποτελεσμάτων αξιολόγησης που προκύπτουν με βάση τις πληροφορίες που παρέχει το σύνολο αναφοράς μπορεί να γίνει μέσω προβλημάτων βελτιστοποίησης, τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις δεν παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυσή τους, ακόμα και σε περιπτώσεις προβλημάτων μεγάλων διαστάσεων. Οι βάσεις αυτής της μεθοδολογικής κατεύθυνσης τέθηκαν από την εργασία του Siskos (1982), ενώ μια αναλυτική καταγραφή νεότερων τάσεων και μεθοδολογιών παρουσιάζεται στην εργασία των Greco et al. (2008).

## 4.3 Επιλογή ενός ευσταθούς μοντέλου απόφασης

Η τρίτη αυτή κατηγορία μεθοδολογικών προσεγγίσεων επικεντρώνεται στη διαμόρφωση του προβλήματος βελτιστοποίησης (2) κατά τρόπο ώστε η βέλτιστη λύση να αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο απόφασης που θα παρέχει ευσταθείς εκτιμήσεις για τις επιδόσεις των εναλλακτικών επιλογών. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί εάν η λύση του προβλήματος (2) επιλεγεί ώστε να αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά το σύνολο των εναλλακτικών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων του προβλήματος. Η ευρετική διαδικασία των Jacquet-Lagrèze and Siskos (1982) αποτελεί την πρώτη προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή. Πρόσφατα, οι Greco et al. (2011) και Kadzinski et al. (2012), εισήγαγαν την έννοια της πλέον «αντιπροσωπευτικής συνάρτησης» αξιολόγησης θεωρώντας ότι αυτή πρέπει να έχει τη μέγιστη διακριτική ικανότητα μεταξύ των εναλλακτικών που αξιολογούνται (δηλαδή να μεγιστοποιεί τις διαφορές στις αξιολογήσεις των εναλλακτικών). Κινούμενοι σε μια διαφορετική φιλοσοφία οι Bous et al. (2010) παρουσίασαν μια μοντελοποίηση του προβλήματος (2) που επιτρέπει την ανάπτυξη μιας προσθετικής συνάρτησης αξίας, η οποία αντιστοιχεί στο αναλυτικό κέντρο (analytic center, Sonnevend, 1985) του πολυέδρου των εφικτών λύσεων για τις παραμέτρους της συνάρτησης.

## 5 Η συμβολή της τεχνητής νοημοσύνης

Η τεχνητή νοημοσύνη (TN) είναι σήμερα ένα ιδιαίτερα ευρύ επιστημονικό πεδίο το οποίο μεταξύ άλλων καλύπτει θέματα όπως τα ευφυή συστήματα αποφάσεων (intelligent decision systems), η εξόρυξη γνώσης από δεδομένα (data mining), οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms), η διαχείριση γνώσης (knowledge engineering and management), τα έμπειρα συστήματα (expert systems), η ασαφής λογική (fuzzy logic), κ.ά. Οι ενότητες που ακολουθούν επικεντρώνονται στο χώρο της στατιστικής θεωρίας μάθησης (statistical learning theory), η οποία όπως θα παρουσιαστεί έχει κοινά στοιχεία με τη φιλοσοφία της ΑΣΠ.

### 5.1 Στατιστική θεωρία μάθησης

Μεταξύ των πεδίων αυτών, η εξόρυξη γνώσης από δεδομένα έχει γνωρίσει τις τελευταίες δύο δεκαετίες σημαντική άνθηση και έχει συμβάλει σημαντικά ανάλυση σύνθετων δεδομένων μεγάλου όγκου από πεδία όπως η μηχανική, η διοίκηση, η ιατρική και οι φυσικές επιστήμες. Οι Hand et al. (2001) ορίζουν την εξόρυξη γνώσης από δεδομένα ως «την ανάλυση (συνήθως μεγάλων) δεδομένων παρατηρήσεων για τον εντοπισμό μη προφανών σχέσεων και τη σύνοψη των πληροφοριών που παρέχουν τα δεδομένα με τρόπο κατανοητό και χρήσιμο για τους αποφασίζοντες».

Στην ανάπτυξη του πεδίου αυτού σημαντικό ρόλο έχει παίξει η στατιστική θεωρία μάθησης, η οποία επικεντρώνεται στις αλγοριθμικές και υπολογιστικές διαδικασίες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία εξόρυξης γνώσης. Σύμφωνα με τον Varnik (1999, 2000), η διαδικασία μάθησης από δεδομένα περιλαμβάνει τρία βασικά στοιχεία:

1. Ένα σύνολο δεδομένων  $X$  αποτελούμενο ανεξάρτητες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από κάποια κατανομή  $P(\mathbf{x})$ . Η κατανομή όμως αυτή δεν είναι γνωστή και επομένως δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί ο τρόπος με τον οποίο έχουν διαμορφωθεί τα δεδομένα.
2. Μια έξοδος  $y$  η οποία προέρχεται από ένα σύνολο  $Y$ , και η οποία ορίζεται για κάθε παρατήρηση  $\mathbf{x}$  σύμφωνα με μια άγνωστη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας  $P(y|\mathbf{x})$ . Το γεγονός ότι η κατανομή αυτή είναι δεν είναι γνωστή, σημαίνει ότι είναι άγνωστη η σχέση μεταξύ των δεδομένων και της εξόδου.
3. Μια μέθοδο μάθησης (learning machine), η οποία μπορεί να διαμορφώσει μια σχέση  $f_\beta : X \rightarrow Y$ , όπου  $\beta$  είναι οι παράμετροι που ορίζουν τη συνάρτηση.

Η βέλτιστη συνάρτηση  $f_\beta$  είναι εκείνη που προσεγγίζει καλύτερα τις πραγματικές εξόδους, δηλαδή αυτή που ελαχιστοποιεί την ακόλουθη συνάρτηση:

$$\int L[y, f_\beta(\mathbf{x})]dP(\mathbf{x}, y) \quad (3)$$

όπου  $L[y, f_\beta(\mathbf{x})]$  είναι μια συνάρτηση των αποκλίσεων μεταξύ της πραγματικής εξόδου  $y$  και της εκτίμησης  $f_\beta(\mathbf{x})$ , και  $P(\mathbf{x}, y) = P(\mathbf{x})P(y|\mathbf{x})$  είναι η κοινή κατανομή των  $\mathbf{x}$  και  $y$ . Η κατανομή αυτή είναι άγνωστη και η μόνη πληροφορία που υπάρχει για αυτήν περιέχεται σε ένα δείγμα εκμάθησης (training set) το οποίο περιλαμβάνει  $m$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)\}$ , οι οποίες θεωρείται ότι προέρχονται από την κατανομή αυτή. Έτσι, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3) αντικαθίσταται από την ακόλουθη εμπειρική εκτίμηση:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L[y_i, f_\beta(\mathbf{x}_i)] \quad (4)$$

Για μια ομάδα συναρτήσεων  $f_\beta$  δεδομένης πολυπλοκότητας, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4) οδηγεί στην ελαχιστοποίηση ενός άνω ορίου της (3). Επομένως, εάν υπάρχει η δυνατότητα ελέγχου της πολυπλοκότητας του μοντέλου απόφασης, η χρήση του εμπειρικού σφάλματος της σχέσης (4) μπορεί να λειτουργήσει πράγματι ικανοποιητικά. Αναλυτική αξιωματική ανάλυση αυτού του μεθοδολογικού πλαισίου και της ασυμπτωτικής συνέπειας διαδικασιών μάθησης παρουσιάζεται στο βιβλίο του Vapnik (2000).

Η παραπάνω παρουσίαση εύκολα καταδεικνύει τις ομοιότητες μεταξύ της ΑΣΠ και των βασικών αρχών της στατιστικής θεωρίας μάθησης. Η ομοιότητα αυτή γίνεται άμεσα εμφανής από τη σύγκριση των σχέσεων (2) και (4), οι οποίες ουσιαστικά οδηγούν στο ίδιο ακριβώς πρόβλημα βελτιστοποίησης. Βέβαια θα πρέπει να τονιστεί ότι παρά τις ομοιότητες, τα δύο πεδία παρουσιάζουν και σημαντικές διαφορές όσον αφορά το πλαίσιο και τη φιλοσοφία της ανάλυσης (Doumros and Zorounidis, 2011, Waegeman et al., 2009).

## 5.2 Ευστάθεια μηχανών μάθησης

Στα πλαίσια της εξόρυξης δεδομένων και της στατιστικής θεωρίας μάθησης, η έννοια της ευστάθειας αναφέρεται στην ικανότητα ενός μοντέλου απόφασης (ή ενός αλγορίθμου μάθησης) να διατηρεί τη δομή του και να παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η εκπαίδευσή του πραγματοποιηθεί βάσει δεδομένων που παρουσιάζουν ατέλειες (σφάλματα, θόρυβος, ελλιπή δεδομένα, κλπ.). Με δεδομένο ότι η ευστάθεια ενός μοντέλου μειώνεται με την πολυπλοκότητά του, η οποία με τη σειρά της συνδέεται άμεσα με την αρχή της ελαχιστοποίησης του εμπειρικού σφάλματος, στη στατιστική θεωρία

μάθησης έχει αναπτυχθεί ένα σημαντικό θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη των τριών αυτών θεμάτων (ευστάθεια, πολυπλοκότητα, ακρίβεια) σε ένα ενιαίο και γενικό πλαίσιο.

Το γενικό αυτό πλαίσιο βασίζεται στην αρχή της κανονικοποίησης του Tikhonov (Tikhonov et al., 1995), η οποία αφορά γραμμικά συστήματα εξισώσεων της μορφής  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ . Όταν το πρόβλημα είναι κακώς ορισμένο (ill-posed) μπορεί να μην έχει λύση και επιπλέον ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα  $\mathbf{A}^{-1}$  μπορεί να παρουσιάζει αστάθειες. Μια ευσταθής λύση κατά τον Tikhonov είναι αυτή που λύνει το προσεγγιστικό σύστημα  $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$  έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|^2 \quad (5)$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι η Ευκλείδεια νόρμα και  $\lambda > 0$  μια παράμετρος η οποία ορίζει την παραχώρηση μεταξύ του σφάλματος της λύσης  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2$  και της ευστάθειάς της.

Με την εισαγωγή της στατιστικής θεωρίας μάθησης, ο Varnik (1999) διαμόρφωσε ένα ενιαίο θεωρητικό πλαίσιο που ενοποιεί την έννοια της ευστάθειας κακώς ορισμένων συστημάτων, την κανονικοποίηση του Tikhonov, την πολυπλοκότητα και την ακρίβεια μοντέλων απόφασης και πρόβλεψης. Ειδικότερα, όπως έδειξε ο Varnik, εάν θεωρηθεί μια απλή δυαδική συνάρτηση σφάλματος<sup>1</sup>, το αναμενόμενο σφάλμα  $E(\beta)$  ενός μοντέλου απόφασης, το οποίο ορίζεται από κάποιες παραμέτρους  $\beta$ , με πιθανότητα  $1 - \alpha$  φράσσεται ως εξής:

$$E(\beta) \leq E_{\text{emp}}(\beta) + \sqrt{\frac{h[\log(2m/h) + 1] - \log(\alpha/4)}{m}} \quad (6)$$

όπου  $E_{\text{emp}}(\beta)$  είναι το εμπειρικό σφάλμα του μοντέλου που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (4) και  $h$  είναι διάσταση Varnik-Chervonenkis, η οποία αναπαριστά την πολυπλοκότητα του μοντέλου απόφασης (και σχετίζεται με τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου). Όπως φαίνεται από τη σχέση (6), όταν υπάρχει ένα πολύ μεγάλο δείγμα εκπαίδευσης σε σχέση με την πολυπλοκότητα του μοντέλου ( $m/h \gg 1$ ), τότε ο δεύτερος όρος της σχέσης (6) περιορίζεται και το αναμενόμενο σφάλμα του μοντέλου ορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από το εμπειρικό σφάλμα. Διαφορετικά όταν ο λόγος  $m/h$  είναι μικρός (τα δεδομένα είναι λίγα σε σχέση με την πολυπλοκότητα του μοντέλου), τότε η ανάπτυξη του μοντέλου θα πρέπει να λάβει υπόψη τόσο την προσαρμογή του στα δεδομένα εκμάθησης, όσο και την πολυπλοκότητά του<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Η διατύπωση του Varnik καλύπτει όλες τις συναρτήσεις σφάλματος. Εδώ για λόγους απλοποίησης της παρουσίασης χρησιμοποιείται μόνο η περίπτωση μιας δυαδικής συνάρτησης.

<sup>2</sup> Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι μελετώντας την ευστάθεια σε πολυκριτήρια προβλήματα ταξινόμησης, οι Vetschera et al. (2010) διαπίστωσαν ότι λόγος μεταξύ του πλήθους των εναλλακτικών στο σύνολο αναφοράς και του πλήθους των κριτηρίων είναι ένας ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας για την ευστάθεια και αξιοπιστία (ακρίβεια) πολυκριτήριων μοντέλων ταξινόμησης.



Επιπλέον, ο Vapnik προχώρησε στην αξιοποίηση του παραπάνω σημαντικού αποτελέσματος της σχέσης (6) για την ανάπτυξη μοντέλων ταξινόμησης σε προβλήματα δύο κατηγοριών όπου στόχος είναι ο διαχωρισμός ενός συνόλου «θετικών» παραδειγμάτων ( $y_i = 1$ ) από «αρνητικά» παραδείγματα ( $y_i = -1$ ). Ειδικότερα, έστω η περίπτωση ενός γραμμικού μοντέλου της μορφής  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}\mathbf{x} - \gamma$ , όπου  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές των  $n$  ανεξάρτητων μεταβλητών και  $\gamma \in \mathbb{R}$  ο σταθερός όρος. Ο Vapnik έδειξε ότι για δεδομένα που ανήκουν σε μια σφαίρα ακτίνας  $R$ , η παράμετρος  $h$  της πολυπλοκότητας ενός μοντέλου τέτοιου ώστε  $\|\mathbf{w}\|^2 \leq L$  (για κάποιο  $L > 0$ ) έχει το ακόλουθο άνω όριο:

$$h \leq \min\{L^2 R^2, n\} + 1 \quad (7)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συνδέει την πολυπλοκότητα του μοντέλου και το αναμενόμενο σφάλμα που προκύπτει από τη χρήση του, με την έννοια της ευστάθειας σύμφωνα με την κανονικοποίηση του Tikhonov και επομένως μπορεί να αποτελέσει «οδηγό» για τη διαμόρφωση ευσταθών μοντέλων.

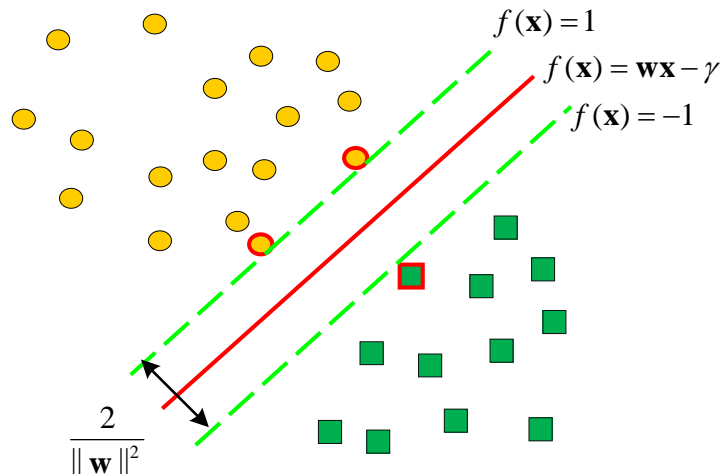
Στην περίπτωση των μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης (support vector machines, Schölkopf and Smola, 2002, Vapnik, 2000) η εφαρμογή των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης για την ανάπτυξη ενός γραμμικού μοντέλου ταξινόμησης παρατηρήσεων σε δύο κατηγορίες:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^m \sigma_i \\ \text{Υ.π.} \quad & y_i(\mathbf{w}\mathbf{x}_i - \gamma) + \sigma_i \geq 1 \\ & \mathbf{w}, \gamma \in \mathbb{R} \\ & \sigma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος αυτού είναι σε αντιστοιχία με τη σχέση (5) στην κανονικοποίηση του Tikhonov. Ειδικότερα, το ρόλο του σφάλματος  $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$  που χρησιμοποιείται στη σχέση (5), παίζει το άθροισμα των σφαλμάτων ταξινόμησης  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  ενώ η παράμετρος  $\lambda$  της (5) στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (8) είναι ουσιαστικά ίση με  $0.5 / C$ . Στο πλαίσιο της θεώρησης του Vapnik η προσθήκη του όρου  $\|\mathbf{w}\|^2$  στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (8) ελαχιστοποιεί το άνω όριο (7) για την πολυπλοκότητα του μοντέλου, δηλαδή το 2ο όρο του άνω φράγματος για το αναμενόμενο σφάλμα του μοντέλου, σύμφωνα με τη σχέση (6). Η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των μεταβλητών σφάλματος αντιστοιχεί στο εμπειρικό σφάλμα  $E_{\text{emp}}(\beta)$  που είναι ο 1ος όρος στο άνω φράγμα του αναμενόμενου σφάλματος.

Επιπλέον, όλη η παραπάνω προσέγγιση έχει και μια γεωμετρική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα (8) εισάγει τα κανονικά υπερεπίπεδα  $\mathbf{w}\mathbf{x} - \gamma = 1$  και  $\mathbf{w}\mathbf{x} - \gamma = -1$  για το

διαχωρισμό των δύο κατηγοριών, έτσι ώστε  $\mathbf{w}\mathbf{x}_i - \gamma \geq 1$  για κάθε περίπτωση με  $y_i = 1$  και  $\mathbf{w}\mathbf{x}_i - \gamma \leq -1$  για κάθε περίπτωση με  $y_i = -1$ . Η απόσταση μεταξύ των δύο υπερεπιπέδων είναι  $2/\|\mathbf{w}\|^2$ . Δηλαδή η λύση του προβλήματος (8) οδηγεί στην ανάπτυξη ενός μοντέλου ταξινόμησης που μεγιστοποιεί την απόσταση από τα όρια των κατηγοριών, όπως παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Μοντέλο απόφασης που μεγιστοποιεί το περιθώριο ταξινόμησης

Το παραπάνω μεθοδολογικό πλαίσιο δεν περιορίζεται σε γραμμικά μοντέλα ταξινόμησης, αλλά έχει γενική ισχύ καλύπτοντας και μη γραμμικά μοντέλα αυθαίρετης πολυπλοκότητας σε προβλήματα ταξινόμησης πολλαπλών κατηγοριών (Bredensteiner and Bennett, 1999), παλινδρόμησης (Mangasarian and Musicant, 2000), μονότονης παλινδρόμησης (Chu and Keerthi, 2007), και ομαδοποίησης (Ben-Hur et al., 2001). Επίσης, παρόμοιες μεθοδολογίες εφαρμόζονται και σε άλλους τύπους μοντέλων απόφασης και πρόβλεψης όπως τα νευρωνικά δίκτυα (Geman et al., 1992).

Εκτός από την ανάλυση της ευστάθειας υπό την έννοια της κανονικοποίησης του Tikhonov και των αρχών του Vapnik, ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί και στην ανάπτυξη μηχανών μάθησης στα πλαίσια της ευσταθούς βελτιστοποίησης (robust optimization). Σύμφωνα με τους Bertsimas et al. (2011), ένα πρόβλημα ευσταθούς βελτιστοποίησης έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Υ.π.} \quad & f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) \leq 0 \quad \forall \mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i, i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{x}$  είναι το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης,  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^k$  είναι διανύσματα διαταραχής που σχετίζονται με την αβεβαιότητα για τις παραμέτρους που ορίζουν τους περιορισμούς και  $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{R}^k$  είναι σύνολα αβεβαιότητας στα οποία ορίζονται οι διαταραχές του προβλήματος. Για παράδειγμα ένα ευσταθές γραμμικό πρόγραμμα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{Υ.π.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}_i \in \mathcal{U}_i, i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{a}_i$  είναι η γραμμή  $i$  του πίνακα  $\mathbf{A}$ , τα στοιχεία της οποίας λαμβάνουν τιμές από το σύνολο αβεβαιότητας  $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ . Στο πλαίσιο αυτό, ένας περιορισμός  $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$  ισχύει για κάθε  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{U}_i$  εάν και μόνο εάν  $\max_{\mathbf{a}_i \in \mathcal{U}_i} \{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}\} \leq b_i$ .

Η θεωρία και τα εργαλεία της ευσταθούς βελτιστοποίησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην ανάπτυξη μοντέλων απόφασης, προκειμένου να αντιμετωπιστούν περιπτώσεις όπου τα δεδομένα εμπεριέχουν αβεβαιότητα. Στην περίπτωση αυτή, οι περιορισμοί του προβλήματος (8) διατυπώνονται ως εξής:

$$y_i[\mathbf{w}(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_i) - \gamma] + \sigma_i \geq 1$$

όπου  $\boldsymbol{\delta}_i$  είναι ένα διάνυσμα με τις πιθανές μεταβολές των στοιχείων της παρατήρησης  $i$ , οι οποίες είναι άγνωστες άλλα μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από κάποια κατανομή ή φράσσονται από κάποιο όριο  $\eta_i$  έτσι ώστε  $\|\boldsymbol{\delta}_i\|^2 \leq \eta_i$ . Διαδικασίες ανάπτυξης μηχανών μάθησης λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα των δεδομένων έχουν παρουσιαστεί μεταξύ άλλων από τους Shivaswamy et al. (2006), Trafalis and Gilbert (2007), και Xu et al. (2009), ενώ στις εργασίες των Xu and Mannor (2012) και Caramanis et al. (2011) γίνεται μια αναλυτική ανασκόπηση της έννοιας της ευστάθειας και των τεχνικών ευσταθούς βελτιστοποίησης στο πεδίο της μηχανικής μάθησης.

### 5.3 Εφαρμογές στην ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων

Οι αρχές και οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια της μηχανικής μάθησης έχουν ήδη αρχίσει να χρησιμοποιούνται και στα πλαίσια της ανάπτυξης μοντέλων αποφάσεων. Οι Herbrich et al. (2000) υπήρξαν από τους πρώτους που εξέτασαν τον τρόπο με τον οποίο οι μηχανές διανυσμάτων αποφάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη συναρτήσεων αξιών γενικής μορφής σε προβλήματα κατάταξης. Παράλληλα, προσαρμόζοντας το θεωρητικό πλαίσιο που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα, κατάφεραν να περιγράψουν την ικανότητα γενίκευσης του μοντέλου κατάταξης σε σχέση με

το διαχωριστικό όριο στις αξίες εναλλακτικών που ανήκουν σε διαδοχικές θέσεις στην κατάταξη.

Η προσαρμογή του θεωρητικού πλαισίου της στατιστικής θεωρίας μάθησης σε προβλήματα μονότονης παλινδρόμησης απασχόλησε και τους Evgeniou et al. (2005). Οι συγγραφείς έδειξαν ότι σε προβλήματα μονότονης ταξινόμησης, στα οποία οι εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς μπορούν να αξιολογηθούν με ακρίβεια μέσω ενός γραμμικού μοντέλου, η ανάπτυξη μίας γραμμικής συνάρτησης αξίας της μορφής  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{w}\mathbf{x}$  με το ελάχιστο δυνατό  $\|\mathbf{w}\|^2$ , οδηγεί σε ευσταθή αποτελέσματα, υπό την έννοια ότι η λύση που διαμορφώνεται αντιστοιχεί στο κέντρο της μεγαλύτερης δυνατής σφαίρας που μπορεί να σχηματιστεί εντός του συνόλου των εφικτών λύσεων για τις παραμέτρους του μοντέλου το οποίο διαμορφώνεται από ένα σύνολο ανισοτήτων της μορφής:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 1, \quad \forall \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}_j$$

Οι Doumros and Zorounidis (2007) ακολούθησαν μια παρόμοια μεθοδολογία για την ανάπτυξη προσθετικών συναρτήσεων αξιών χρησιμοποιώντας την  $L_1$  νόρμα των παραμέτρων του μοντέλου απόφασης. Επαυξάνοντας τη συνάρτηση βελτιστοποίησης λαμβάνοντας όχι μόνο τα σφάλματα του μοντέλου αλλά και την πολυπλοκότητά του, μπόρεσαν να περιγράψουν την ακρίβεια του μοντέλου σε σχέση με την ποιότητα των δεδομένων στο σύνολο αναφοράς. Εμπειρικά αποτελέσματα σε προβλήματα κατάταξης και ταξινόμησης έδειξαν ότι η προσαρμογή του κριτηρίου προσαρμογής του μοντέλου απόφασης στα στοιχεία του συνόλου αναφοράς, οδηγεί σε μοντέλα που ανταποκρίνονται καλύτερα στο σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντα, είναι περισσότερο ευσταθή σε μεταβολές του συνόλου αναφοράς και έχουν υψηλότερη ικανότητα γενίκευσης.

Η ανάπτυξη προσθετικών συναρτήσεων αξιών μέσω τεχνικών από τη στατιστική θεωρία μάθησης απασχόλησε και του Dembczynski et al. (2006), οι οποίοι παρουσίασαν μια μεθοδολογία που συνδυάζει το μεθοδολογικό πλαίσιο των μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης με τη θεωρία των προσεγγιστικών συνόλων για προβλήματα ταξινόμησης.

Εκτός όμως από συναρτησιακά μοντέλα αποφάσεων, αντίστοιχες έρευνες έχουν παρουσιαστεί πρόσφατα και για σχεσιακά μοντέλα (relational models), τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για την αναπαράσταση και πραγματοποίηση διμερών συγκρίσεων μεταξύ των διαθέσιμων εναλλακτικών ενεργειών. Οι Waegeman et al. (2009) παρουσίασαν τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσαρμοστεί το πλαίσιο των μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης για την ανάπτυξη σχεσιακών μοντέλων προτίμησης και υπεροχής. Μάλιστα έδειξαν, ότι μια τέτοια προσέγγιση είναι ικανή να καλύψει ένα μεγάλο εύρος μοντέλων αποφάσεων συμπεριλαμβανομένων των συναρτήσεων αξιών καθώς και ολοκληρωμάτων Choquet. Ως παράδειγμα οι Waegeman et al. (2009) παρουσίασαν την ανάπτυξη μοντέλων σχέσεων υπεροχής τα οποία χρησιμοποιούνται στις μεθόδους ELECTRE. Οι Pahikkala et al. (2010) μελέτησαν περαιτέρω το μεθοδολογικό πλαίσιο των Waegeman et al. (2009)

επικεντρωνόμενοι στην ανάπτυξη σχεσιακών μοντέλων που παραβιάζουν τη μεταβατική ιδιότητα.

Θα πρέπει βέβαια να τονιστεί ότι εκτός της στατιστικής θεωρίας μάθησης, για την ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων στα πλαίσια της ΑΣΠ έχουν χρησιμοποιηθεί και άλλες μεθοδολογίες προσεγγίσεις από το πεδίο της τεχνητής νοημοσύνης όπως τα νευρωνικά δίκτυα (Malakooti and Zhou, 1994, Hu, 2009), τα συστήματα μάθησης κανόνων αποφάσεων (Greco et al., 1999), και η ασαφής λογική (Hüllermeier and Brinker, 2008).

## 6 Συμπεράσματα και μελλοντικές ερευνητικές κατευθύνσεις

Η ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων μέσω της ΑΣΠ παρέχει ένα σημαντικό μεθοδολογικό εργαλείο για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων σε περιπτώσεις απαιτώντας ένα μικρό όγκο πληροφοριών από τον αποφασίζοντα. Ενώ όμως η χρήση ενός μικρού συνόλου δεδομένων αναφοράς διευκολύνει την ανάπτυξη του μοντέλου απόφασης, ταυτόχρονα δημιουργεί ορισμένες δυσκολίες, τις οποίες ο αναλυτής θα πρέπει να αντιμετωπίσει με προσοχή.

Μεταξύ δυσκολιών αυτών το θέμα της ευστάθειας είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Η ευστάθεια αφορά τόσο την ανάλυση των διαφόρων εναλλακτικών μοντέλων απόφασης, τα οποία αναπαριστούν εξίσου ικανοποιητικά τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα, όσο και την επιλογή του πλέον κατάλληλου μοντέλου, αλλά και την ευστάθεια των αποτελεσμάτων σε μεταβολών στα δεδομένων στα οποία βασίζεται η ανάλυση. Τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης και ιδιαίτερα από το πεδίο της στατιστικής θεωρίας μάθησης μπορούν να συμβάλουν σημαντικά στην ολοκληρωμένη μελέτη της ευστάθειας στα πλαίσια της ΑΣΠ. Οι ομοιότητες που παρουσιάζει ο χώρος της ΑΣΠ σε σχέση με τη στατιστική θεωρία μάθησης σε σχέση τουλάχιστον με τις διαδικασίες παλινδρόμησης που εφαρμόζονται, μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές συνέργιες από το συνδυασμό των δύο πεδίων. Ειδικότερα, η στατιστική θεωρία μάθησης παρέχει ένα ισχυρό θεωρητικό υπόβαθρο που περιγράφει την ευστάθεια σε διαδικασίες εξόρυξης γνώσης από δεδομένα δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στη σχέση της ευστάθειας με την ικανότητα εξαγωγής γενικών συμπερασμάτων υψηλής ακρίβειας. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί και στην ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων μέσω τεχνικών από το χώρο της ΑΣΠ συμβάλλοντας στην ολοκληρωμένη ανάλυση της ευστάθειας τόσο σε σχέση με την κατασκευή ενός ευσταθούς μοντέλου απόφασης από ένα δεδομένο σύνολο αναφοράς, όσο και στη ανάλυση των αποτελεσμάτων σε σχέση με μεταβολές του συνόλου αναφοράς.

Ταυτόχρονα, ο συνδυασμός τεχνικών από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης με την ΑΣΠ επιτρέπει τη μελέτη της ευστάθειας για διάφορους εναλλακτικούς τύπους μοντέλων αποφάσεων συμπεριλαμβανομένων συναρτήσεων αξιών και σχέσεων υπεροχής. Στη κατεύθυνση αυτή μπορεί να συμβάλει και η χρήση νέων υπολογιστικών διαδικασιών από το χώρο της υπολογιστικής νοημοσύνης (εξελικτική βελτιστοποίηση και μεθευρετικοί αλγόριθμοι), οι οποίες επιτρέπουν την ανάπτυξη σύνθετων μοντέλων αποφάσεων στα πλαίσια της ΑΣΠ.

## Βιβλιογραφία

- Avis, D., & Fukuda, K. (1992). A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete and Computational Geometry*, 8, 295-313.
- Ben-Hur, A., Horn, D., Siegelmann, H., & Vapnik, V. (2001). Support vector clustering. *Journal of Machine Learning Research*, 2, 125-137.
- Bertsimas, D., Brown, D., & Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53(3), 464-501.
- Bous, B., Fortemps, P., Glineur, F., & Pirlot, M. (2010). ACUTA: A novel method for eliciting additive value functions on the basis of holistic preference statements. *European Journal of Operational Research*, 206(2), 435-444.
- Brans, J.-P., & Mareschal, B. (2005). PROMETHEE methods. In J. Figueira, S. Greco, & M. Ehrgott (Eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis-State of the Art Surveys* (pp. 163-195). Boston: Springer.
- Bredensteiner, E., & Bennett, K. (1999). Multicategory classification by support vector machines. *Computational Optimization and Applications*, 12(1-3), 53-79.
- Caramanis, C., Mannor, S., & Xu, H. (2011). Robust optimization in machine learning. In S. Sra, S. Nowozin, & S. Wright (Eds.), *Optimization for Machine Learning* (pp. 369-402). Cambridge: MIT Press.
- Chu, W., & Keerthi, S. (2007). Support vector ordinal regression. *Neural Computation*, 19(3), 792-815.
- Dembczynski, K., Kotlowski, W., & Slowinski, R. (2006). Additive preference model with piecewise linear components resulting from dominance-based rough set approximations. In L. Rutkowski, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, & J. Zurada (Eds.), *Artificial Intelligence and Soft Computing ICAISC 2006* (Vol. 4029, pp. 499-508). Springer Berlin / Heidelberg.
- Doumpos, M., & Zopounidis, C. (2007). Regularized estimation for preference disaggregation in multiple criteria decision making. *Computational Optimization and Applications*, 38, 61-80.
- Doumpos, M., & Zopounidis, C. (2011). Preference disaggregation and statistical learning for multicriteria decision support: A review. *European Journal of Operational Research*, 209(3), 203-214.

- Doumpos, M., Marinakis, Y., Marinaki, M., & Zopounidis, C. (2009). An evolutionary approach to construction of outranking models for multicriteria classification: The case of the ELECTRE TRI method. *European Journal of Operational Research*, 199(2), 496-505.
- Evgeniou, T., Boussios, C., & Zacharia, G. (2005). Generalized robust conjoint estimation. *Marketing Science*, 24(3), 415-429.
- Figueira, J., Mousseau, V., & Roy, B. (2005). ELECTRE methods. In J. Figueira, S. Greco, & M. Ehrgott (Eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis-State of the Art Surveys* (pp. 133-162). Boston: Springer.
- Geman, S., Bienenstock, E., & Doursat, R. (1992). Neural networks and the bias/variance dilemma. *Neural Computation*, 4(1), 1-58.
- Greco, S., Kadzinski, M., & Slowinski, R. (2011). Selection of a representative value function in robust multiple criteria sorting. *Computers and Operations Research*, 38(11), 1620-1637.
- Greco, S., Matarazzo, B., & Slowinski, R. (1999). Rough approximation of a preference relation by dominance relations. *European Journal of Operational Research*, 117, 63-83.
- Greco, S., Slowinski, R., Figueira, J., & Mousseau, V. (2008). Robust ordinal regression. In M. Ehrgott, S. Greco, & J. Figueira (Eds.), *Trends in Multiple Criteria Decision Analysis* (pp. 241-283). New York: Springer.
- Hüllermeier, E., & Brinker, K. (2008). Learning valued preference structures for solving classification problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(18), 2337-2352.
- Hand, D., Mannila, H., & Smyth, P. (2001). *Principles of Data Mining*. Cambridge: MIT Press.
- Herbrich, R., Graepel, T., & Obermayer, K. (2000). Large margin rank boundaries for ordinal regression. In A. Smola, P. Bartlett, B. Schölkopf, & D. Schuurmans (Eds.), *Advances in Large Margin Classifiers* (pp. 115-132). Cambridge, MA: MIT Press.
- Hu, Y.-C. (2009). Bankruptcy prediction using ELECTRE-based single-layer perceptron. *Neurocomputing*, 72, 3150-3157.
- Jacquet-Lagrèze, E., & Siskos, Y. (1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: The UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10, 151-164.
- Jacquet-Lagrèze, E., & Siskos, Y. (2001). Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience. *European Journal of Operational Research*, 130, 233-245.
- Kadzinski, M., Greco, S., & Slowinski, R. (2012). Selection of a representative value function in robust multiple criteria ranking and choice. *European Journal of Operational Research*, 217(3), 541-553.
- Keeney, R., & Raiffa, H. (1993). *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*. Cambridge: Cambridge University Press.



- Malakooti, B., & Zhou, Y. (1994). Feedforward artificial neural networks for solving discrete multiple criteria decision making problems. *Management Science*, 40(11), 1542-1561.
- Mangasarian, O., & Musicant, D. (2000). Robust linear and support vector regression. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(9), 950-955.
- Pahikkala, T., Waegeman, W., Tsivtsivadze, W., Baets, B. D., & Salakoski, T. (2010). Learning intransitive reciprocal relations with kernel methods. *European Journal of Operational Research*, 206(3), 676-685.
- Roy, B. (1996). *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. New York: Springer.
- Roy, B. (2010). Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. *European Journal of Operational Research*, 2010(3), 629-638.
- Schölkopf, B., & Smola, A. (2002). *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Shivaswamy, P., Bhattacharyya, C., & Smola, A. (2006). Second order cone programming approaches for handling missing and uncertain data. *Journal of Machine Learning Research*, 6, 1283-1314.
- Siskos, J. (1982). A way to deal with fuzzy preferences in multicriteria decision problems. *European Journal of Operational Research*, 10(3), 314-324.
- Siskos, Y., & Grigoroudis, E. (2010). New trends in aggregation-disaggregation approaches. In C. Zopounidis, & P. Pardalos (Eds.), *Handbook of Multicriteria Analysis* (pp. 189-214). Berlin Heidelberg: Springer.
- Sonnevend, G. (1985). An “analytical centre” for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prekopa, J. Szelezsan, & B. Strazicky (Eds.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (pp. 866-876). Berlin: Springer Verlag.
- Tervonen, T., Valkenhoef, G. v., Basturk, N., & Postmus, D. (2012). Hit-and-run enables efficient weight generation for simulation-based multiple criteria decision analysis. *European Journal of Operational Research* (in press)
- Tikhonov, A., Goncharsky, A., Stepanov, V., & A.G., Y. (1995). *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Kluwer Academic Publishers.
- Trafalis, T., & Gilbert, R. (2007). Robust support vector machines for classification and computational issues. *Optimization Methods and Software*, 22(1), 187-198.
- Vapnik, V. (1999). An overview of statistical learning theory. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 10(5), 988-999.
- Vapnik, V. (2000). *The Nature of Statistical Learning Theory* (2nd ed.). New York: Springer.
- Vetschera, R. (1997). A recursive algorithm for volume-based sensitivity analysis of linear decision models. *Computers and Operations Research*, 24(4), 477-491.

- 
- Vetschera, R., Chen, Y., Hipel, K., & Kilgour, D. (2010). Robustness and information levels in case-based multiple criteria sorting. *European Journal of Operational Research*, 202(3), 841-852.
- Vincke, P. (1992). *Multicriteria Decision Aid*. New York: John Wiley and Sons.
- Vincke, P. (1999). Robust solutions and methods in decision-aid. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 8(3), 181-187.
- Waegeman, W., Baets, B. D., & Boullart, B. (2009). Kernel-based learning methods for preference aggregation. *4OR*, 7, 169-189.
- Xu, H., & Mannor, S. (2012). Robustness and generalization. *Machine Learning*, 86, 391-423.
- Xu, H., Caramanis, C., & Mannor, S. (2009). Robustness and regularization of support vector machines. *Journal of Machine Learning Research*, 10, 1485-1510.
- Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. New York: McGraw-Hill.