

Απόστολος Δάμιαλης

Μερικές διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα αλλαγής φάσεων

Διδακτορική διατριβή



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απόστολος Δάμιαλης

Μερικές διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα αλλαγής φάσεων

Διδακτορική διατριβή



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

© 2012 Απόστολος Δάμαλης

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και εγκρίθηκε στις 21 Δεκεμβρίου 2012 από τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Εξεταστική επιτροπή

Καθ. Νικόλαος Δ. Αλικάκος (*Πανεπιστήμιο Αθηνών, επιβλέπων καθηγητής*)

Καθ. Giorgio Fusco (*Università dell'Aquila*)

Καθ. Μάρκος Α. Κατσουλάκης (*Πανεπιστήμιο Κρήτης και University of Massachusetts*)

Καθ. Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος (*Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών*)

Καθ. Ιωάννης Γ. Στρατής (*Πανεπιστήμιο Αθηνών*)

Αν. Καθ. Γεράσιμος Μπαρμπάτης (*Πανεπιστήμιο Αθηνών*)

Επικ. Καθ. Γεωργία Καραλή (*Πανεπιστήμιο Κρήτης*)



Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο – ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος II. Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

*όλοι πασκίζουνε ιδρώνουν
χάνουνε, πετυχαίνουν ή
νομίζουν ότι χάνουνε ή
νομίζουν ότι πετυχαίνουν*

Μ. Σαχτούρης, Οι γενναίοι

Πρόλογος

Η διατριβή αυτή αποτελείται από δύο εργασίες στην περιοχή των μερικών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες ασχολούνται με δύο φυσικά φαινόμενα αλλαγής φάσεων. Η πρώτη ασχολείται με το φαινόμενο της ωρίμασης Ostwald και αναπαράγει μία εκδοχή της θεωρίας των Lifshitz, Slyozon και Wagner μέσω ομογενοποίησης ενός προβλήματος Stefan. Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας αυτής έγινε στο Πανεπιστήμιο Humboldt του Βερολίνου υπό την επίβλεψη της καθηγήτριας Barbara Niethammer. Η δεύτερη εργασία ασχολείται με την εξαγωγή των συνθηκών Plateau για τις γωνίες στις τριπλές συμβολές διεπιφανειών στον τριδιάστατο χώρο από τη διανυσματική εξίσωση Allen–Cahn μέσω ενός ταυστή τάσης που συνδέεται με την εξίσωση. Η εργασία αυτή έγινε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών σε συνεργασία με τον καθηγητή Νικόλαο Αλικάκο και τον Παναγιώτη Αντωνόπουλο.

Οι ευχαριστίες που οφείλω όσον αφορά τη διατριβή αυτή είναι πάρα πολλές και σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Νίκο Αλικάκο για τη μεγάλη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε, αλλά και για την κατανόηση και για όλα όσα έμαθα από αυτόν, μαθηματικά και μη. Ευχαριστώ επίσης την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου στο Βερολίνο Barbara Niethammer και το συμφοιτητή μου Παναγιώτη Αντωνόπουλο για τη συνεργασία, καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, καθηγητές Giorgio Fusco και Μάρκο Κατσουλάκη, και της επταμελούς επιτροπής, καθηγητές Θανάση Γιαννακόπουλο και Γιάννη Στρατή, τον αναπληρωτή καθηγητή Γεράσιμο Μπαρμπάτη και την επίκουρη καθηγήτρια Γεωργία Καραλή. Ευχαριστώ τέλος το φίλο μου Βασίλη Καράδαη για τη βοήθειά του στη διόρθωση και την τυπογραφία του κειμένου. Η διατριβή αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου Αλεξάνδρα και Χρήστο, χωρίς τη βοήθεια και τη συμπαράσταση των οποίων δεν θα πραγματοποιούνταν ποτέ.

Η έρευνα που οδήγησε στα αποτελέσματα της διατριβής χρηματοδοτήθηκε από την DFG μέσω του Graduiertenkolleg RTG-1128 «Analysis, Numerics, and Optimization of Multiphase Problems» στο Πανεπιστήμιο Humboldt του Βερολίνου και από το πρόγραμμα «Ηράκλειτος II» του ΕΠΕΑΕΚ II στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Απόστολος Δάμιαλης

Αθήνα, Δεκέμβριος 2012

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vii
1 Η εξίσωση Lifshitz–Slyozov–Wagner για κινητική ρυθμιζόμενη μέσω αντίδρασης	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Διατύπωση του προβλήματος, αλλαγή κλίμακας και προκαταρκτικές εκτιμήσεις	4
1.3 Προσέγγιση και εκτιμήσεις του ρυθμού διάγκωσης	8
1.4 Ομογενοποίηση	17
2 Συνθήκες Plateau για τη διανυσματική εξίσωση Allen–Cahn	21
2.1 Εισαγωγή	21
2.2 Διατύπωση του προβλήματος και προκαταρκτικά	24
2.3 Εξαγωγή του νόμου του Young	27
Βιβλιογραφία	37

Κεφάλαιο 1

Η εξίσωση Lifshitz–Slyozov–Wagner για κινητική ρυθμιζόμενη μέσω αντίδρασης

1.1 Εισαγωγή

Η συμπεριφορά ενός υλικού κατά το τελευταίο στάδιο μιας διαδικασίας αλλαγής φάσης πρώτης τάξης (λόγω μεταβολών στη θερμοκρασία ή και στην πίεση) χαρακτηρίζεται από θερμοδυναμική αστάθεια η οποία οδηγεί σε διαχωρισμό των φάσεων και στη συνέχεια στην αδροποίηση της νέας φάσης που προκύπτει. Στην περίπτωση που η νέα φάση καταλαμβάνει πολύ μικρό ποσοστό του συνολικού όγκου και εμφανίζεται ως σαφώς διαχωρισμένα σωματίδια, η διαδικασία της αδροποίησης (γνωστή ως *ωρίμαση Ostwald*) εξελίσσεται ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επιφανειακή ενέργεια στη διεπιφάνεια μέσω διάχυσης μάζας μεταξύ των σωματιδίων, ενώ η συνολική μάζα ή ο όγκος της κάθε φάσης διατηρείται. Το αποτέλεσμα αυτής της διάχυσης μάζας από περιοχές μεγάλης καμπυλότητας της διεπιφάνειας σε περιοχές μικρότερης καμπυλότητας είναι η διόγκωση των μεγάλων σωματιδίων και η συρρίκνωση και η τελική εξαφάνιση των μικρότερων. Περισσότερες πληροφορίες για την ωρίμαση Ostwald, κυρίως από την πλευρά της φυσικής και της μοντελοποίησης, υπάρχουν στο άρθρο του Voorhees [51] και στο βιβλίο των Ratke και Voorhees [44].

Στη συγκεκριμένη εκδοχή αδροποίησης η διαδικασία διάχυσης της μάζας μπορεί να εξαρτάται από δύο διαφορετικούς μηχανισμούς: είτε από το ρυθμό διάχυσης των ατόμων μακριά από τα σωματίδια ή από το ρυθμό αντίδρασης της προσκόλλησης των ατόμων στη διεπιφάνεια που διαχωρίζει τις δύο φάσεις. Στην πρώτη περίπτωση (*ρύθμιση μέσω διάχυσης*) η τυχαία ανταλλαγή ατόμων ανάμεσα στα σωματίδια και την περιβάλλουσα φάση συμβαίνει αρκετά γρήγορα και το περιβάλλον ενός σωματιδίου βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με τα άτομα στο εσωτερικό του.

Στη δεύτερη περίπτωση (ρύθμιση μέσω αντίδρασης) η αποκόλληση και η προσκόλληση γίνονται με αργή ταχύτητα σε σχέση με τη διάχυση της μάζας και το περιβάλλον ενός σωματιδίου μπορεί να μην βρίσκεται σε ισορροπία με τη διεπιφάνεια στο σύνορό του. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία από την πλευρά της φυσικής, για παράδειγμα στα άρθρα Slezon και Sagalovich [47], Bartelt, Theis και Tromp [15], ή για μια σχετική μαθηματική μελέτη στο άρθρο των Dai και Pego [20].

Η κλασική θεωρία της ωρίμασης Ostwald αναπτύχθηκε από τους Lifshitz και Slyozon [29] και Wagner [52] στην περίπτωση υπερκορεσμένων στερεών μειγμάτων στις τρεις διαστάσεις. Η θεωρία Lifshitz–Slyozon–Wagner (LSW) περιγράφει στατιστικά την εξέλιξη του φαινομένου μέσω της συνάρτησης πυκνότητας των ακτίνων των σωματιδίων $n(t, R)$, όπου $n(t, R) dR$ ορίζεται να είναι το πλήθος των σωματιδίων με ακτίνες μεταξύ R και dR στο χρόνο t ανά μονάδα όγκου. Στα τελευταία στάδια μιας διαδικασίας αλλαγής φάσης η πυρηνοποίηση και η συνένωση των σωματιδίων μπορούν να αγνοηθούν, αφού οι νέοι πυρήνες διαλύονται αμέσως και τα σωματίδια δεν μπορούν να ενωθούν λόγω των μεγάλων αποστάσεων μεταξύ τους. Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση πυκνότητας των ακτίνων ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας (βλ. [44, §5.1])

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t, R) + \frac{\partial}{\partial R} (v(t, R)n(t, R)) = 0,$$

όπου με $v(t, R)$ συμβολίζουμε το ρυθμό διάλυσης των σωματιδίων με ακτίνα R στο χρόνο t . Χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση μέσου πεδίου (βλ. παράγραφο 1.3) οι Lifshitz, Slyozon και Wagner με τυπικούς υπολογισμούς δείχνουν ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t, R) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R^2} (R\bar{u} - 1)n(t, R) \right) = 0$$

με

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_0^\infty n(t, R) dR}{\int_0^\infty R n(t, R) dR}$$

στην περίπτωση ρύθμισης μέσω διάχυσης και

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t, R) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\left(\bar{u} - \frac{1}{R} \right) n(t, R) \right) = 0$$

με

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_0^\infty R n(t, R) dR}{\int_0^\infty R^2 n(t, R) dR}$$

στην περίπτωση ρύθμισης μέσω αντίδρασης, με τα δύο αποτελέσματα να ισχύουν στο ασυμπτωτικό όριο του μηδενικού ποσοστού μάζας ή όγκου σωματιδίων.

Στα άρθρα [36, 37] η Niethammer εξήγαγε με αυστηρό τρόπο τις παραπάνω εξισώσεις για την περίπτωση της ρύθμισης μέσω διάχυσης ξεκινώντας από ένα

σχεδόν-στατικό πρόβλημα Stefan για μία φάση, το οποίο περιλαμβάνει επίσης επιφανειακή τάση και κινητική υπόψυξη, δηλαδή

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \setminus G, \\ V = \nabla u \cdot \mathbf{n} & \text{στο } \partial G, \\ u = H + \beta V & \text{στο } \partial G, \end{cases}$$

και περιορίζοντάς το σε σφαιρικά σωματίδια. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε στο άρθρο [36] για το παραβολικό πρόβλημα εξέλιξης, αλλά χωρίς τον κινητικό όρο βV . Στο παραπάνω πρόβλημα το u είναι ένα χημικό δυναμικό, \mathbf{n} είναι η εξωτερική κάθετος στη φάση G των σωματιδίων, V είναι η κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας ∂G και H είναι η μέση καμπυλότητά της. Το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ θεωρείται φραγμένο και β είναι μια παράμετρος που προέρχεται από τη διαστατική ανάλυση και είναι της τάξης της διαχυτικότητας προς την κινητικότητα του υλικού. Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη είναι ο νόμος Gibbs–Thomson, που συνδυάζει την καμπυλότητα της διεπιφάνειας με το χημικό δυναμικό, τροποποιημένος όμως με τον κινητικό όρο βV . Σημειώνουμε ότι ενώ στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω διάχυσης η παράμετρος β είναι μικρή και ο κινητικός όρος μπορεί και να αγνοηθεί (δίνοντας έτσι το γνωστό μοντέλο Mullins–Sekerka [34]), στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης οι τιμές της παραμέτρου β είναι μεγάλες και κατά συνέπεια ο κινητικός όρος είναι απαραίτητος. Για μία εξαγωγή τέτοιου είδους προβλημάτων ελεύθερου συνόρου από τη μηχανική συνεχούς μέσου και τη θερμοδυναμική βλ. το βιβλίο του Gurtin [28].

Ο στόχος μας στη συνέχεια είναι να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στα άρθρα [36, 37] για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις LSW στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης. Αυτό προϋποθέτει την αλλαγή της κλίμακας του χρόνου κάνοντας χρήση του ορίου της παραμέτρου β στο άπειρο (βλ. παράγραφο 1.2) και έχει ως αποτέλεσμα μερικούς επιπλέον χειρισμούς στις αποδείξεις. Εκτός από την αλλαγή κλίμακας, στην παράγραφο 1.2 δίνουμε επίσης μερικές σύντομες αποδείξεις κάποιων χρήσιμων προκαταρκτικών αποτελεσμάτων και θίγουμε το θέμα της ισχύος της περιγραφής μέσου πεδίου, ενώ στην παράγραφο 1.3 αποδεικνύουμε σημειακές εκτιμήσεις για τις προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος ελεύθερου συνόρου και για τους ρυθμούς διάγκωσης των σωματιδίων. Τέλος, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις, στην παράγραφο 1.4 περνάμε στο όριο ομογενοποίησης για άπειρα σωματίδια και καταλήγουμε στην εξίσωση LSW σε ασθενή μορφή.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα για την περίπτωση της ρύθμισης μέσω διάχυσης έδειξαν ότι η κρίσιμη ποσότητα η οποία πρέπει να μηδενίζεται στο όριο ώστε να μπορούν να αγνοηθούν οι απευθείας αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων και να ισχύει η περιγραφή μέσου πεδίου είναι η χωρητικότητα του συνόλου της φάσης των σωματιδίων (βλ. [36, 37]). Αντιθέτως, στη συνέχεια δείχνουμε ότι στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης η αντίστοιχη κρίσιμη ποσότητα είναι η πυκνότητα του επιφανειακού εμβαδού της φάσης των σωματιδίων. Η διαφορά

αυτή είναι ενδιαφέρουσα, αφού τα ασυμπτωτικά όρια του μηδενικού επιφανειακού εμβαδού και της μηδενικής χωρητικότητας έχουν διαφορετική φυσική ερμηνεία και διασαφηνίζουν περαιτέρω το γενικό όριο του μηδενικού ποσοστού μάζας ή όγκου. Για την περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης πάντως, το αποτέλεσμα θα μπορούσε να είναι κατά κάποιον τρόπο αναμενόμενο, αφού το όριο του μηδενικού επιφανειακού εμβαδού αντιστοιχεί στη φυσική του συγκεκριμένου φαινομένου, όπου υπάρχει προφανής εξάρτηση από το εμβαδό της διεπιφάνειας.

1.2 Διατύπωση του προβλήματος, αλλαγή κλίμακας και προκαταρκτικές εκτιμήσεις

Θεωρούμε το πρόβλημα (1.1), όπου η σχεδόν-στατική προσέγγιση στην παραβολική εξίσωση διάχυσης δικαιολογείται από τις μικρές ταχύτητες των διεπιφανειών κατά το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας της αδροποίησης. (Βλ. τη συζήτηση στο άρθρο των Mullins και Sekerka [34].)

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η στερεά φάση αποτελείται από σφαιρικά σωματίδια με κέντρα φιξαρισμένα στο χώρο, μία απλοποίηση του προβλήματος που δικαιολογείται από τα αποτελέσματα στα άρθρα Alikakos και Fusco [7, 8] και Velázquez [50]. Συμβολίζοντας τα σωματίδια αυτά με B_i , όπου B_i είναι η κλειστή μπάλα $B(x_i, R_i(t))$, η φάση των σωματιδίων είναι η ένωση $\cup_i B_i$ και η ισοτροπική της εξέλιξη μπορεί να μοντελοποιηθεί παίρνοντας το μέσο ολοκλήρωμα στη συνθήκη Stefan, δηλαδή

$$V = \dot{R}_i(t) := \int_{\partial B_i} \nabla u \cdot \mathbf{n},$$

όπου το μέσο ολοκλήρωμα ορίζεται ως

$$\int_D f := \frac{1}{|D|} \int_D f$$

για μια συνάρτηση f σε κάποιο χωρίο D και όπου η τελεία συμβολίζει την παράγωγο ως προς το χρόνο· ο νόμος Gibbs–Thomson γράφεται τότε

$$u = \frac{1}{R_i} + \beta \dot{R}_i,$$

αφού στην περίπτωση σφαιρών η μέση καμπυλότητα είναι η αντίστροφη ακτίνα.

Για να έχουμε πολλά μικρά σωματίδια σε ένα φραγμένο χωρίο, για ένα σύστημα μεγέθους της τάξης $O(1)$, π.χ. για το μοναδιαίο κύβο $[0, 1]^3$, έστω δ η τυπική απόσταση μεταξύ σωματιδίων με $0 < \delta \ll 1$. Για την κατανομή των σωματιδίων στο χώρο υποθέτουμε για λόγους ευκολίας ότι είναι τοποθετημένα σε ένα τριδιάστατο πλέγμα με ελάχιστη απόσταση δ μεταξύ τους. Τότε, ο αρχικός αριθμός των σωματιδίων $N_i(\delta)$ θα φράσσεται από το $1/\delta^3$ και για να έχουμε μικρά σωματίδια έστω ότι αυτά είναι μεγέθους δ^α για $\alpha > 1$. Για χρόνους $t \in [0, T]$ επιλέγουμε ένα δ αρκετά μικρό έτσι ώστε τα γειτονικά σωματίδια μεγέθους δ^α να μην συγκρούονται κατά την εξέλιξη του φαινομένου μέχρι ένα μέγιστο χρόνο T .

Σχετικά με την κατανομή των σωματιδίων στο χώρο, για τους σκοπούς μας θα ήταν αρκετή και μια πιο γενική υπόθεση του τύπου $\inf_{i \neq j} |x_i - x_j| > c\delta$ για μια σταθερά $c > 0$. Αυτές οι παρατηρήσεις θα χρησιμοποιηθούν επίσης στην απόδειξη του Λήμματος 1.3, όπου προσεγγίζουμε ένα συγκεκριμένο άθροισμα για όλα τα σωματίδια με ένα ολοκλήρωμα. Για μία αντιμετώπιση του προβλήματος χρησιμοποιώντας πιο λεπτομερείς ντετερμινιστικές και στοχαστικές υποθέσεις για την κατανομή των σωματιδίων σε σχέση με τη διαδικασία της ομογενοποίησης βλ. Niethammer και Velázquez [41, 42], όπου επίσης υπάρχουν και επιπλέον διορθώσεις της θεωρίας.

Για να θεωρήσουμε σωματίδια με μέγεθος της τάξης $O(1)$ αλλάζουμε κλίμακα στις ακτίνες

$$R_i^\delta := \frac{R_i}{\delta^\alpha}$$

και λόγω του αναλλοίωτου του προβλήματος (1.1) κάτω από αλλαγές κλίμακας (βλ. [20]) ορίζουμε επίσης

$$u^\delta := \delta^\alpha u \text{ και } t^\delta := \frac{t}{\delta^{2\alpha}}.$$

Αυτή η αλλαγή κλίμακας είναι ένας εναλλακτικός τρόπος να περιγραφεί η περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης. Αντί να αλλάξουμε κλίμακα στο χρόνο μέσω της παραμέτρου β και να πάρουμε το όριο της β να τείνει στο άπειρο, κρατάμε τη β φixαρισμένη και θετική και αλλάζουμε κλίμακα όπως παραπάνω, παίρνοντας το όριο του δ να τείνει στο 0. Αφού πλέον η παράμετρος β δεν παίζει κάποιο συγκεκριμένο ρόλο, θα τη θεωρήσουμε στη συνέχεια ίση με τη μονάδα. Επιπλέον προκύπτει εύκολα ότι οι μετασχηματισμοί R_i^δ , u^δ και t^δ διατηρούν τη μορφή των εξισώσεων. Στη συνέχεια, θα αγνοήσουμε τον εκθέτη δ από το συμβολισμό για το χρόνο και για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση από τη νέα κλίμακα γράφουμε

$$B_i^\delta := \overline{B(x_i, \delta^\alpha R_i^\delta)}.$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω διάχυσης η αντίστοιχη κλίμακα χρόνου θα ήταν $\delta^{3\alpha}$ αντί για $\delta^{2\alpha}$. Αυτή η διαφορά είναι ουσιώδης για το υπόλοιπο της εργασίας και οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα σχετικά με την ισχύ της προσέγγισης μέσου πεδίου. (Βλ. τα σχόλια μετά το Λήμμα 1.1.)

Όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, για το κέντρο x_i κάθε σωματιδίου αντιστοιχούμε μία φραγμένη αρχική ακτίνα $R_i^\delta(0)$ με την υπόθεση ότι

$$\sup_{i \in N_i} R_i^\delta(0) \leq R_0$$

ομοιόμορφα για μια σταθερά R_0 . Για να έχουμε ένα κλειστό σύστημα θεωρούμε την παρακάτω μηδενική συνθήκη Neumann στο εξωτερικό σύνορο του χωρίου Ω , δηλαδή

$$\nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ στο } \partial\Omega.$$

Στην περίπτωση που το σωματίδιο i εξαφανιστεί στο χρόνο $t_i := \sup\{t \mid R_i^\delta(t) > 0\}$, για χρόνους μεγαλύτερους του t_i ορίζουμε την R_i^δ να είναι 0, ελαττώνουμε τον αριθμό

$$N(t) := \{j \mid R_j^\delta(t) > 0\}$$

των ενεργών σωματιδίων κατά ένα και αγνοούμε το σύνορο ∂B_i^δ στις συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια, όλα τα άθροιστα, οι ενώσεις και τα ελάχιστα άνω φράγματα θα θεωρούνται στο σύνολο δεικτών $N(t)$, με $N(0) \equiv N_i$, και οι όποιες αναφορές στο πλήθος των σωματιδίων θα εννοούν το πλήθος των ενεργών σωματιδίων N εκτός κι αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα για τις ακτίνες των σωματιδίων, περιορισμένο σε σφαιρικά σωματίδια και μετά την αλλαγή κλίμακας, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μη τοπικό, N -διάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$(1.2) \quad \dot{R}_i^\delta(t) = \frac{1}{4\pi\delta^{2\alpha} R_i^\delta(t)^2} \int_{\partial B_i^\delta(t)} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \text{ στο } \partial B_i^\delta(t)$$

για χρόνους $t \in (0, t_i)$, με $t_i < T$, και με φραγμένες αρχικές συνθήκες $R_i^\delta(0)$ για κάθε i , ενώ το χημικό δυναμικό δίνεται από τις εξισώσεις

$$(1.3) \quad -\Delta u^\delta(t, x) = 0 \text{ στο } \Omega \setminus \cup B_i^\delta(t),$$

$$(1.4) \quad u^\delta(t, x) = \frac{1}{R_i^\delta(t)} + \dot{R}_i^\delta(t) \text{ στο } \partial B_i^\delta(t)$$

και τη συνθήκη Neumann στο εξωτερικό σύνορο.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα συνεχών, τμηματικά ομαλών λύσεων για όλους τους χρόνους αποδείχθηκε στο άρθρο [37] για ένα παρόμοιο πρόβλημα Stefan χρησιμοποιώντας το θεώρημα Picard–Lindelöf, με μόνη διαφορά την αλλαγή στην κλίμακα του χρόνου. Αυτές οι λύσεις δεν είναι ολικά ομαλές λόγω των ιδιομορφιών που προέρχονται από την εξαφάνιση των σωματιδίων· παρ' όλα αυτά οι λύσεις είναι ομαλές στα χρονικά διαστήματα ανάμεσα στους χρόνους εξαφάνισης t_i . Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε λύσεις του προβλήματος θα εννοούμε τέτοιου είδους συνεχείς, τμηματικά ομαλές λύσεις που υπάρχουν για χρόνους μικρότερους από δοθέντα χρόνο T .

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις (1.2)–(1.4) μαζί με την εξωτερική συνοριακή συνθήκη διατηρούν τον όγκο και ελαττώνουν το συνολικό επιφανειακό εμβαδό της φάσης των σωματιδίων. Πράγματι, αν παραγωγίσουμε το συνολικό όγκο των σωματιδίων ως προς το χρόνο παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \sum_i R_i^\delta(t)^3 = 3 \sum_i R_i^\delta(t)^2 \dot{R}_i^\delta(t) = 3 \sum_i R_i^\delta(t)^2 \frac{1}{4\pi\delta^{2\alpha} R_i^\delta(t)^2} \int_{\partial B_i^\delta} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n},$$

όπου το τελευταίο άθροισμα μηδενίζεται λόγω του θεωρήματος της απόκλισης, της εξίσωσης (1.3) και της μηδενικής συνοριακής συνθήκης Neumann στο $\partial\Omega$. Η ελάττωση του συνολικού επιφανειακού εμβαδού είναι συνέπεια της παρακάτω εκ των προτέρων εκτίμησης.

Λήμμα 1.1. Για κάθε χρόνο $t \in (0, T)$ οι λύσεις του προβλήματος ικανοποιούν την παρακάτω ισότητα ενέργειας.

$$\sum_i \int_0^t (R_i^\delta)^2 |\dot{R}_i^\delta|^2 + \frac{1}{2} \sum_i R_i^\delta(t)^2 + \frac{1}{4\pi\delta^{2\alpha}} \int_0^t \int_{\Omega \setminus \cup B_i^\delta} |\nabla u^\delta|^2 = \frac{1}{2} \sum_i R_i^\delta(0)^2.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $-\Delta u^\delta = 0$ με u^δ , ολοκληρώνοντας στο σύνολο $\Omega \setminus \cup B_i^\delta$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη, παίρνουμε ότι

$$\int_{\Omega \setminus \cup B_i^\delta} |\nabla u^\delta|^2 + \sum_i \int_{\partial B_i^\delta} (\nabla u^\delta \cdot \mathbf{n}) u^\delta - \int_{\partial \Omega} (\nabla u^\delta \cdot \mathbf{n}) u^\delta = 0,$$

όπου ο τελευταίος όρος μηδενίζεται λόγω της συνθήκης Neumann στο εξωτερικό σύνορο. Οπότε, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.4) και (1.2) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega \setminus \cup B_i^\delta} |\nabla u^\delta|^2 &= \sum_i \left(\frac{1}{R_i^\delta} + \dot{R}_i^\delta \right) \int_{\partial B_i^\delta} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{R_i^\delta} + \dot{R}_i^\delta \right) 4\pi\delta^{2\alpha} (R_i^\delta)^2 \dot{R}_i^\delta \\ &= 4\pi\delta^{2\alpha} \sum_i (R_i^\delta \dot{R}_i^\delta + (R_i^\delta)^2 |\dot{R}_i^\delta|^2) \end{aligned}$$

ή, αν αλλάξουμε μέλη,

$$(1.5) \quad \sum_i (R_i^\delta)^2 |\dot{R}_i^\delta|^2 + \sum_i R_i^\delta \dot{R}_i^\delta + \frac{1}{4\pi\delta^{2\alpha}} \int_{\Omega \setminus \cup B_i^\delta} |\nabla u^\delta|^2 = 0.$$

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει μετά από ολοκλήρωση ως προς το χρόνο. \square

Μετά από μια κανονικοποίηση ως προς τον αρχικό αριθμό σωματιδίων N_i , αυτή η ισότητα ενέργειας μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την ισχύ της προσέγγισης μέσου πεδίου στο πρόβλημα. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i} \sum_i \int_0^t (R_i^\delta)^2 |\dot{R}_i^\delta|^2 + \frac{1}{2N_i} \sum_i R_i^\delta(t)^2 + \frac{1}{4\pi N_i \delta^{2\alpha}} \int_0^t \int_{\Omega \setminus \cup B_i^\delta} |\nabla u^\delta|^2 \\ = \frac{1}{2N_i} \sum_i R_i^\delta(0)^2, \end{aligned}$$

όπου το δεξιό μέλος είναι ομοιόμορφα φραγμένο λόγω της υπόθεσης για τις αρχικές ακτίνες. Για να είναι το αριστερό μέλος επίσης φραγμένο, αν η ποσότητα $N_i \delta^{2\alpha}$ τείνει στο 0, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τον όρο $|\nabla u^\delta|$ και πρόκειται για ακριβώς αυτό το όριο του μηδενικού επιφανειακού εμβαδού το οποίο οδηγεί σε ένα μέσο πεδίο που είναι σταθερό στο χώρο, αφού συγκεκριμένα τότε ισχύει

$$\nabla u^\delta \rightarrow 0 \text{ στον } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Στη συνέχεια, για να κάνουμε ολικές εκτιμήσεις στο χρόνο οι οποίες να είναι ομοιόμορφες ως προς το δ , επεκτείνουμε το u^δ στο εσωτερικό των σωματιδίων, και άρα σε ολόκληρο το Ω , χρησιμοποιώντας τη συνοριακή τιμή του κάθε σωματιδίου στο εσωτερικό του. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στις κλίμακες που χρησιμοποιούμε, για να μηδενίζεται το επιφανειακό εμβαδό καθώς το δ τείνει στο 0, ο εκθέτης α πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερος του $\frac{3}{2}$, αφού ο αριθμός N_i είναι της τάξης $O(1/\delta^3)$. Με αυτές τις λεπτομέρειες θα ασχοληθούμε με περισσότερη ακρίβεια στο Πρόσιμα 1.4, όπου θα δώσουμε μια εκτίμηση της επιρροής του μέσου πεδίου. Ας σημειωθεί επίσης ότι δεν ασχολούμαστε με την κρίσιμη περίπτωση $\alpha = \frac{3}{2}$ η οποία αντιστοιχεί σε πεπερασμένο (μη μηδενικό) επιφανειακό εμβαδό. Για αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι διαφορετικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν από τους Niethammer και Otto στο άρθρο [38].

Τέλος, σημειώνουμε ότι για το αντίστοιχο πρόβλημα στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω διάχυσης η ποσότητα που θα πρέπει να μηδενίζεται για να δικαιολογεί την περιγραφή μέσου πεδίου είναι η χωρητικότητα $N_i \delta^\alpha$ λόγω της διαφορετικής κλίμακας χρόνου. Στις τρεις διαστάσεις το όριο της μηδενικής χωρητικότητας εμφανίζεται επίσης και στα γενικά αποτελέσματα ομογενοποίησης των Cioganescu και Murat [19]: από όσο γνωρίζουμε, το όριο του μηδενικού επιφανειακού εμβαδού δεν έχει αναφερθεί στη σχετική βιβλιογραφία.

1.3 Προσέγγιση και εκτιμήσεις του ρυθμού διόγκωσης

Όπως και στην προσέγγιση μέσου πεδίου των Lifshitz, Slyozov και Wagner, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αρκετά αραιό ώστε τα σωματίδια να συμπεριφέρονται σαν να ήταν απομονωμένα και βασίζουμε την προσέγγισή μας στη λύση ενός προβλήματος για ένα μεμονωμένο σωματίδιο.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα (1.2)–(1.4) για ένα σφαιρικό σωματίδιο με κέντρο στην αρχή των αξόνων και με ακτίνα r πριν την αλλαγή κλίμακας, για την οποία κάνουμε τον μετασχηματισμό $r^\delta := r/\delta^\alpha$ μαζί με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς για την περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης για ένα χημικό δυναμικό u_r^δ και για το χρόνο, όπως στην παράγραφο 1.2. Για αυτό το σωματίδιο B_r^δ θεωρούμε σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο το πρόβλημα

$$\dot{r}^\delta(t) = \frac{1}{4\pi\delta^{2\alpha}r^\delta(t)^2} \int_{\partial B_r^\delta} \nabla u_r^\delta \cdot \mathbf{n} \text{ στο } \partial B_r^\delta,$$

όπου το χημικό δυναμικό $u_r^\delta(t, x)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$-\Delta u_r^\delta(t, x) = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus B_r^\delta,$$

$$u_r^\delta(t, x) = \frac{1}{r^\delta(t)} + \dot{r}^\delta(t) \text{ για } x \in \partial B_r^\delta$$

και η υπόθεση μέσου πεδίου εμφανίζεται ως συνθήκη στο άπειρο, δηλαδή ως το όριο

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_r^\delta(t, x) = \bar{u}_r^\delta(t).$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αναλυτικά δίνοντας ως αποτέλεσμα ότι

$$u_r^\delta(t, x) = \bar{u}_r^\delta(t) + \frac{\delta^\alpha r^\delta(t)}{1 + \delta^\alpha r^\delta(t)} (1 - \bar{u}_r^\delta(t) r^\delta(t)) \frac{\delta^\alpha}{|x|}$$

και

$$\dot{r}^\delta(t) = \frac{1}{1 + \delta^\alpha r^\delta(t)} \left(\bar{u}_r^\delta(t) - \frac{1}{r^\delta(t)} \right).$$

Σημειώνουμε ότι στο τυπικό όριο του δ στο 0 οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$u(t, x) = \bar{u}(t) \text{ και } \dot{r} = \bar{u} - \frac{1}{r},$$

όπως και στη θεωρία LSW στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης.

Επιστρέφοντας τώρα στο πρόβλημα για πολλά σωματίδια, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ρυθμό διάγκωσης ενός μεμονωμένου σωματιδίου μαζί με την απαίτηση της διατήρησης του συνολικού όγκου, υπολογίζουμε για το μέσο πεδίο την έκφραση

$$(1.6) \quad \bar{u}^\delta = \frac{\sum R_i^\delta / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)}{\sum (R_i^\delta)^2 / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)}.$$

Αυτό το μέσο πεδίο συν ένα άθροισμα λύσεων μεμονωμένων σωματιδίων θα είναι η προσέγγιση με μονόπολα για τη λύση u^δ υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν απευθείας αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σωματίδια. Με βάση αυτή την ιδέα ορίζουμε την προσεγγιστική λύση

$$(1.7) \quad \zeta^\delta(t, x) := \bar{u}^\delta(t) + \sum_i \frac{\delta^\alpha R_i^\delta(t)}{1 + \delta^\alpha R_i^\delta(t)} (1 - \bar{u}^\delta(t) R_i^\delta(t)) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_i|}$$

για $x \in \Omega \setminus \cup B_i^\delta(t)$.

Ακολουθεί μια αρχή μεγίστου για το πρόβλημά μας, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη σύγκριση της προσέγγισης με τη λύση στο επόμενο λήμμα. Η απόδειξή της μπορεί να βρεθεί στο άρθρο [37].

Λήμμα 1.2. Έστω Ω ένα χωρίο Lipschitz και έστω $\cup B_i \subset \Omega$ μία πεπερασμένη συλλογή από ζένες μεταξύ τους κλειστές μπάλες. Τότε, μια συνάρτηση v η οποία είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα σύνορα ∂B_i και ικανοποιεί ότι

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{στο } \Omega \setminus \cup B_i, \\ v - c_i \int_{\partial B_i} \nabla v \cdot \mathbf{n} \geq 0 & \text{στο } \partial B_i, \\ \nabla v \cdot \mathbf{n} \geq 0 & \text{στο } \partial \Omega, \end{cases}$$

όπου $c_i \geq 0$ για κάθε i , ικανοποιεί επίσης ότι

$$v \geq 0 \text{ στο } \Omega \setminus \cup B_i.$$

Λήμμα 1.3. Για χρόνους $t \in (0, T)$ και ε μικρό και θετικό το χημικό δυναμικό και η προσέγγισή του ικανοποιούν την εκτίμηση

$$\|u^\delta - \zeta^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_i^\delta)}(t) \leq C \delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta(t) (1 + \bar{u}^\delta(t) \sup R_i^\delta(t)).$$

Απόδειξη. Αφού η διαφορά $u^\delta - \zeta^\delta$ είναι ήδη αρμονική στο $\Omega \setminus \cup B_i^\delta$, λόγω του ότι η συνάρτηση ζ^δ είναι άθροισμα θεμελιωδών λύσεων, θα θέλαμε να εκτιμήσουμε κατά πόσο ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες της αρχής του μεγίστου του Λήμματος 1.2.

Για τη συνθήκη στα σύνορα των σωματιδίων χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (1.2), (1.4) και τον ορισμό της ζ^δ για να υπολογίσουμε ότι για x στο σύνορο ∂B_i^δ του σωματιδίου i ισχύει η εκτίμηση

$$\begin{aligned} & \left| \left(\zeta^\delta(t, x) - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} \right) - \left(u^\delta(t, x) - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \right) \right| \\ &= \left| \zeta^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} \right| \\ &= \left| \bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} + \sum_j \left\{ \frac{\delta^\alpha R_j^\delta}{1 + \delta^\alpha R_j^\delta} (1 - \bar{u}^\delta R_j^\delta) \left(\frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla \left(\frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right) \cdot \mathbf{n} \right) \right\} \right| \end{aligned}$$

και αφού από το θεώρημα της απόκλισης για $j \neq i$ ισχύει ότι

$$\int_{\partial B_i^\delta} \nabla \left(\frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

ενώ για $j = i$

$$\int_{\partial B_i^\delta} \nabla \left(\frac{\delta^\alpha}{|x - x_i|} \right) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\delta^\alpha (R_i^\delta)^2},$$

συνεχίζουμε τον υπολογισμό και παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \left| \left(\zeta^\delta(t, x) - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} \right) - \left(u^\delta(t, x) - \int_{\partial B_i^\delta} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \right) \right| \\ &= \left| \bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} + \frac{1 - \bar{u}^\delta R_i^\delta}{R_i^\delta (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)} + \sum_j \frac{\delta^\alpha R_j^\delta}{1 + \delta^\alpha R_j^\delta} (1 - \bar{u}^\delta R_j^\delta) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right| \\ &= \left| \sum_{j \neq i} \frac{\delta^\alpha R_j^\delta}{1 + \delta^\alpha R_j^\delta} (1 - \bar{u}^\delta R_j^\delta) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right| \\ &\leq \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta) \sum_{j \neq i} \frac{\delta^3}{|x - x_j|} \\ (1.8) \quad &\leq C \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta). \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα, έχοντας υπόψιν τις υποθέσεις για την κατανομή των κέντρων των σωματιδίων στο χώρο, το άθροισμα είναι φραγμένο για $j \neq i$, αφού θεωρείται ως προσέγγιση του αθροίσματος Riemann για το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} dy,$$

το οποίο προκύπτει ότι είναι φραγμένο κάνοντας χρήση της ακτινικής συμμετρίας γύρω από την ιδιομορφία και όπου ο εκθέτης δ^3 στο άθροισμα προέρχεται από την αλλαγή κλίμακας στο χώρο.

Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη της αρχής του μεγίστου στο εξωτερικό σύνορο του $\partial\Omega$ θεωρούμε τη συνάρτηση σύγκρισης $\zeta^\delta + z^\delta$, όπου η βοηθητική συνάρτηση z^δ είναι λύση του προβλήματος

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\Delta z^\delta = \int_{\partial\Omega} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} & \text{στο } \Omega, \\ \nabla z^\delta \cdot \mathbf{n} = -\nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} & \text{στο } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} z^\delta = 0, \end{cases}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση σύγκρισης $\zeta^\delta + z^\delta$ να έχει μηδενική κάθετη παράγωγο κατά κατεύθυνση στο $\partial\Omega$. Για να χρησιμοποιήσουμε την αρχή του μεγίστου η συνάρτηση z^δ πρέπει επίσης να είναι αρμονική στο Ω και για αυτό το σκοπό πρέπει το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n}$ να μηδενίζεται. Ισχύει ότι

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \zeta^\delta \cdot \mathbf{n} = \delta^\alpha \sum_i \frac{\delta^\alpha R_i^\delta}{1 + \delta^\alpha R_i^\delta} (1 - R_i^\delta \bar{u}^\delta) \int_{\partial\Omega} \nabla \left(\frac{1}{|x-x_i|} \right) \cdot \mathbf{n},$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με -4π ανεξάρτητα του i . Οπότε, η συνάρτηση z^δ είναι αρμονική αν και μόνο αν ισχύει

$$\bar{u}^\delta = \frac{\sum R_i^\delta / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)}{\sum (R_i^\delta)^2 / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)},$$

το οποίο είναι ακριβώς το μέσο πεδίο (1.6) όπως προέκυψε από την προσέγγιση μέσου πεδίου για ένα μεμονωμένο σωματίδιο στην αρχή της παραγράφου. Επιπλέον, αφού η z^δ είναι αρμονική, το θεώρημα της απόκλισης δίνει ότι

$$\int_{\partial B_i^\delta} \nabla z^\delta \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή του Λήμματος 3 του άρθρου [36] και ελλειπτική θεωρία (βλ. Gilbarg και Trudinger [26]) παίρνουμε την εκτίμηση

$$\|z^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\varepsilon \delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta),$$

όπου ε ένας μικρός θετικός αριθμός.

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή του μεγίστου στη συνάρτηση

$$f_+ := u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta + C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta).$$

Για μια αρκετά μεγάλη σταθερά C , έστω $2C_\varepsilon$, τα παρακάτω ισχύουν για την f_+ : είναι αρμονική, ισχύει ότι $\nabla f_+ \cdot \mathbf{n} = 0$ στο $\partial\Omega$ από την κατασκευή της z^δ και για τις σταθερές $c_i = 1/4\pi\delta^{2\alpha}(R_i^\delta)^2$ η εκτίμηση (1.8) δίνει ότι

$$u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta + C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta) - c_i \int_{\partial B_i^\delta} \nabla(u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta) \cdot \mathbf{n} \geq 0.$$

Συνεπώς, η f_+ ικανοποιεί τις συνθήκες της αρχής του μεγίστου και άρα ισχύει ότι $f_+ \geq 0$ στο $\Omega \setminus \cup B_i^\delta$, δηλαδή

$$u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta \geq -C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta).$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του μεγίστου για τη συνάρτηση $-v$ αντί της v , η συνάρτηση

$$f_- := u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta - C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta)$$

ικανοποιεί επίσης τις αντίστοιχες συνθήκες και όπως πριν παίρνουμε ότι $f_- \leq 0$ στο $\Omega \setminus \cup B_i^\delta$, δηλαδή

$$u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta \leq C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε ότι

$$\|u^\delta - \zeta^\delta - z^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_i^\delta)} \leq C\delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_i^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta)$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα κάνοντας χρήση της ομαλότητας της z^δ . \square

Είναι προφανές ότι η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο λήμμα δεν αφορά την κρίσιμη περίπτωση $\alpha = \frac{3}{2}$. Για τη συνέχεια, εισάγουμε για τεχνικούς λόγους ένα νέο εκθέτη $\gamma > 0$ με την ιδιότητα

$$\delta^\gamma := \max\{\delta^\alpha, \delta^{2\alpha-3}, \delta^{2\alpha-3-\varepsilon}\}$$

για α μεγαλύτερο του $\frac{3}{2} + \varepsilon$.

Ως πόρισμα του προηγούμενου λήμματος παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση της επιρροής του μέσου πεδίου.

Πόρισμα 1.4. Για χρόνους $t \in (0, T)$ και $\gamma > 0$ το χημικό δυναμικό και το μέσο πεδίο ικανοποιούν την εκτίμηση

$$\|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_i^\delta)}(t) \leq C\delta^\gamma (1 + 2 \sup R_i^\delta(t))(1 + \bar{u}^\delta(t) \sup R_i^\delta(t)).$$

Απόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα και το Λήμμα 1.3 ισχύει ότι

$$\|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)} \leq \|\zeta^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)} + C \delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_j^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta).$$

Για να εκτιμήσουμε τη νόρμα $\|\zeta^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)}$, από τον ορισμό της ζ^δ για $x \in \Omega \setminus \cup B_j^\delta$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |\zeta^\delta(t, x) - \bar{u}^\delta(t)| &= \left| \sum_j \frac{\delta^\alpha R_j^\delta}{1 + \delta^\alpha R_j^\delta} (1 - \bar{u}^\delta R_j^\delta) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right| \\ &\leq \frac{\delta^\alpha R_i^\delta}{1 + \delta^\alpha R_i^\delta} (1 + \bar{u}^\delta R_i^\delta) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_i|} \\ &\quad + \left| \sum_{j \neq i} \frac{\delta^\alpha R_j^\delta}{1 + \delta^\alpha R_j^\delta} (1 - \bar{u}^\delta R_j^\delta) \frac{\delta^\alpha}{|x - x_j|} \right| \end{aligned}$$

και αφού ισχύει $|x - x_i| \geq \delta^\alpha R_i^\delta$ στο $\Omega \setminus \cup B_j^\delta$, επιχειρηματολογώντας όπως και στην εκτίμηση (1.8) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |\zeta^\delta(t, x) - \bar{u}^\delta(t)| &\leq \frac{\delta^\alpha (1 + \bar{u}^\delta R_i^\delta)}{1 + \delta^\alpha R_i^\delta} + C \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta (1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta) \\ &\leq C(\delta^\alpha + \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta)(1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta). \end{aligned}$$

Συνεπώς, ισχύει η εκτίμηση

$$\|\zeta^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)} \leq C(\delta^\alpha + \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta)(1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta)$$

και τελικά έχουμε ότι

$$\|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)} \leq C(\delta^\alpha + \delta^{2\alpha-3} \sup R_j^\delta + \delta^{2\alpha-3-\varepsilon} \sup R_j^\delta)(1 + \bar{u}^\delta \sup R_j^\delta).$$

Χρησιμοποιώντας τον εκθέτη γ παίρνουμε την εκτίμηση

$$\|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_j^\delta)} \leq C \delta^\gamma (1 + 2 \sup R_i^\delta)(1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta). \quad \square$$

Το παρακάτω λήμμα δίνει μία εκτίμηση του ρυθμού διόγκωσης των σωματιδίων, σε αντιστοιχία με την θεωρία LSW στην περίπτωση της ρύθμισης μέσω αντίδρασης.

Λήμμα 1.5. Για χρόνους $t \in (0, T)$ και $\gamma > 0$ για τους ρυθμούς διόγκωσης των σωματιδίων ισχύει ότι

$$\left| \dot{R}_i^\delta - \left(\bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} \right) \right| \leq C \delta^\gamma (1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta)(1 + (1 + \delta^\gamma \sup R_i^\delta)(1 + 2 \sup R_i^\delta)).$$

Απόδειξη. Έστω w_i^δ το δυναμικό χωρητικότητας της μπάλας B_i^δ σε σχέση με μια μεγαλύτερη μπάλα $B_i^{\lambda\delta} := B(x_i, \lambda\delta^\alpha R_i^\delta)$ για $\lambda > 1$, δηλαδή έστω w_i η λύση του προβλήματος

$$(1.10) \quad \begin{cases} -\Delta w_i^\delta = 0 & \text{στο } B_i^{\lambda\delta} \setminus B_i^\delta, \\ w_i^\delta = 0 & \text{στο } \partial B_i^{\lambda\delta}, \\ w_i^\delta = 1 & \text{στο } B_i^\delta. \end{cases}$$

Ένας υπολογισμός δίνει ότι

$$(1.11) \quad w_i^\delta = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda\delta^\alpha R_i^\delta}{|x-x_i|} \right)$$

και επίσης

$$(1.12) \quad \int_{\partial B_i^\delta} \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} = 4\pi \frac{\lambda}{1-\lambda} \delta^\alpha R_i^\delta.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.2)–(1.4) και τη συνοριακή συνθήκη Neumann σε συνδυασμό με τις παραπάνω ιδιότητες της w_i^δ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned} 4\pi\delta^{2\alpha}(R_i^\delta)^2\dot{R}_i^\delta &= \int_{\partial B_i^\delta} \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_{\partial B_i^\delta} w_i^\delta \nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \\ &= - \int_{B_i^{\lambda\delta} \setminus B_i^\delta} \nabla w_i^\delta \nabla u^\delta \\ &= \int_{\partial B_i^\delta} u^\delta \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} u^\delta \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_{\partial B_i^\delta} \left(\frac{1}{R_i^\delta} + \dot{R}_i^\delta \right) \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} u^\delta \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} \\ &= 4\pi \frac{\lambda}{1-\lambda} \delta^\alpha R_i^\delta \left(\frac{1}{R_i^\delta} + \dot{R}_i^\delta - \bar{u}^\delta \right) - \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} (u^\delta - \bar{u}^\delta) \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.12) και προσθαφαιρέσαμε τον όρο \bar{u}^δ . Αλλάζοντας μέλη έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \dot{R}_i^\delta - \left(\bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} \right) \right| &= \left| \frac{1-\lambda}{\lambda} \delta^\alpha R_i^\delta \dot{R}_i^\delta + \frac{1-\lambda}{4\pi\lambda\delta^\alpha R_i^\delta} \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} (u^\delta - \bar{u}^\delta) \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} \right| \\ &\leq \frac{\lambda-1}{\lambda} \delta^\alpha R_i^\delta |\dot{R}_i^\delta| + \frac{\lambda-1}{4\pi\lambda\delta^\alpha R_i^\delta} \left| \int_{\partial B_i^{\lambda\delta}} (u^\delta - \bar{u}^\delta) \nabla w_i^\delta \cdot \mathbf{n} \right| \\ (1.13) \quad &\leq \delta^\alpha R_i^\delta |\dot{R}_i^\delta| + \|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_i^\delta)}, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ξανά τη σχέση (1.12). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.4) για το u^δ στο ∂B_i^δ έχουμε ότι

$$(1.14) \quad R_i^\delta |\dot{R}_i^\delta| \leq 1 + R_i^\delta |u^\delta| \leq 1 + R_i^\delta (\|u^\delta - \bar{u}^\delta\|_{L^\infty(\Omega \setminus \cup B_i^\delta)} + \bar{u}^\delta).$$

Αντικαθιστώντας στην (1.13) και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1.4 παίρνουμε την τελική εκτίμηση. \square

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύεται ότι τα φράγματα στις εκτιμήσεις για την προσέγγιση και το ρυθμό διόγκωσης είναι ομοιόμορφα.

Λήμμα 1.6. *Για χρόνους $t \in (0, T)$ το μέσο πεδίο και οι ακτίνες των σωματιδίων είναι ομοιόμορφα φραγμένες, δηλαδή ισχύει*

$$\bar{u}^\delta(t) \leq C \text{ και } \sup R_i^\delta(t) \leq C.$$

Απόδειξη. Για το μέσο πεδίο (1.6) ισχύει

$$\bar{u}^\delta = \frac{\sum R_i^\delta / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)}{\sum (R_i^\delta)^2 / (1 + \delta^\alpha R_i^\delta)} \leq \sup R_i^\delta (1 + \delta^\alpha \sup R_i^\delta) \frac{\sum R_i^\delta}{\sum (R_i^\delta)^3}$$

και αφού από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι

$$\frac{\sum R_i^\delta}{\sum (R_i^\delta)^3} \leq \left(\frac{\sum 1}{\sum (R_i^\delta)^3} \right)^{2/3} \leq \left(\frac{1}{\sum \delta^3 (R_i^\delta)^3} \right)^{2/3},$$

η διατήρηση του συνολικού όγκου δίνει ότι

$$\bar{u}^\delta \leq C \sup R_i^\delta (1 + \delta^\alpha \sup R_i^\delta)$$

ή, χρησιμοποιώντας τον εκθέτη γ ,

$$(1.15) \quad \bar{u}^\delta \leq C \sup R_i^\delta (1 + \delta^\gamma \sup R_i^\delta).$$

Έστω τώρα το σύνολο

$$A := \left\{ t \mid \sup R_i^\delta(t) \leq \frac{1}{\delta^{\gamma/4}} \right\}.$$

Τότε, για χρόνους $t \in A$, αντικαθιστώντας την (1.15) στην εκτίμηση (1.14) και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1.4 έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} (R_i^\delta)^2 \leq C \sup (R_i^\delta)^2 + C.$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα χρόνου $(0, T)$ η ανισότητα Gronwall δίνει ότι

$$\sup_i \sup_{t \in A \cap [0, T]} (R_i^\delta)^2 \leq C(T)$$

και άρα $[0, T] \subset A$, δηλαδή οι ακτίνες είναι φραγμένες μέχρι το χρόνο T και το ίδιο ισχύει για το μέσο πεδίο από την εκτίμηση (1.15). \square

Τέλος, το επόμενο λήμμα δίνει εκτιμήσεις για τους ρυθμούς διόγκωσης των σωματιδίων που εξαφανίζονται και θα φανεί χρήσιμο στην επόμενη παράγραφο.

Λήμμα 1.7. Για χρόνους $t \in (0, T)$ έτσι ώστε $R_i^\delta(t) \leq 1/4 \sup_{t,\delta} \bar{u}^\delta(t)$ και για αρκετά μικρό δ ισχύει ότι

$$-\frac{2}{R_i^\delta} \leq \dot{R}_i^\delta \leq -\frac{1}{2R_i^\delta} < 0$$

και

$$\sqrt{t_i - t} \leq R_i^\delta \leq 2\sqrt{t_i - t}.$$

Απόδειξη. Για τη συνάρτηση

$$g := \frac{\delta^\alpha R_i^\delta}{1 + \delta^\alpha R_i^\delta} \frac{\delta^\alpha}{|x - x_i|}$$

ισχύει ότι η διαφορά $u^\delta - g$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της αρχής του μεγίστου στο Λήμμα 1.2 για σταθερές $c_i = 1/4\pi\delta^{2\alpha}(R_i^\delta)^2$ δίνοντας ότι $u^\delta \geq g$ στο $\Omega \setminus \cup B_i^\delta$. Αλλά αφού $u^\delta = g$ στο σύνορο ∂B_i^δ , από τη μονοτονία προκύπτει ότι $\nabla u^\delta \cdot \mathbf{n} \geq \nabla g \cdot \mathbf{n}$ στο ∂B_i^δ και παίρνοντας τα μέσα ολοκληρώματα στο ∂B_i^δ έχουμε ότι

$$\dot{R}_i^\delta \geq -\frac{1}{R_i^\delta(1 + \delta^\alpha R_i^\delta)} \geq -\frac{2}{R_i^\delta}.$$

Επιπλέον, το Λήμμα 1.5 δίνει ότι

$$\dot{R}_i^\delta \leq \bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} + C\delta^\gamma(1 + \bar{u}^\delta \sup R_i^\delta)(1 + (1 + \delta^\gamma \sup R_i^\delta)(1 + 2 \sup R_i^\delta)).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την υπόθεση ότι για τις ακτίνες ισχύει $R_i^\delta \leq 1/4 \sup_{t,\delta} \bar{u}^\delta$ και αφού από το Λήμμα 1.6 προκύπτει ότι για αρκετά μικρό δ ο όρος της τάξης $O(\delta^\gamma)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένος από το $1/4R_i^\delta$, παίρνουμε ότι

$$\dot{R}_i^\delta \leq \frac{1}{4R_i^\delta} - \frac{1}{R_i^\delta} + \frac{1}{4R_i^\delta} \leq -\frac{1}{2R_i^\delta}.$$

Έστω τώρα

$$y_1 := \sqrt{t_i - t} \quad \text{και} \quad y_2 := 2\sqrt{t_i - t}$$

υπολύσεις και υπερλύσεις που αντίστοιχα λύνουν τις εξισώσεις

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{2y_1} \quad \text{και} \quad \dot{y}_2 = -\frac{2}{y_2}.$$

Με ένα επιχειρήμα σύγκρισης παίρνουμε το δεύτερο συμπέρασμα του λήμματος, δηλαδή ότι $y_1 \leq R_i^\delta \leq y_2$. \square

1.4 Ομογενοποίηση

Για να περάσουμε στο όριο ομογενοποίησης για άπειρα σωματίδια πρέπει πρώτα να περιγράψουμε τη συνάρτηση πυκνότητας των ακτίνων στο όριο. Ορίζουμε για κάθε χρόνο $t \in (0, T)$ το εμπειρικό μέτρο ν_t^δ μέσω της σχέσης

$$\langle \phi, \nu_t^\delta \rangle = \int \phi(t, R_i^\delta(t)) d\nu_t^\delta := \frac{1}{N_i} \sum \phi(t, R_i^\delta(t)) \text{ για } \phi \in C_c,$$

δηλαδή για συναρτήσεις $\phi(t, R)$ συνεχείς και με συμπαγή φορέα στη μεταβλητή της ακτίνας.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις εκτιμήσεις της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.8. *Για μια υπακολουθία $\delta \rightarrow 0$ και για μια συνάρτηση $\bar{u} \in W^{1,p}(0, T)$ για $p < 2$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \bar{u}^\delta &\rightarrow \bar{u} \text{ στον } L^2(0, T), \\ u^\delta &\rightarrow \bar{u} \text{ στον } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Επιπλέον, τα μέτρα ν_t^δ συγκλίνουν σε μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας ν_t έτσι ώστε

$$\int \phi d\nu_t^\delta \rightarrow \int \phi a(t) d\nu_t \text{ ομοιόμορφα στο χρόνο } t,$$

όπου με $a(t)$ συμβολίζουμε το ποσοστό των ενεργών σωματιδίων στο όριο.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.7 έχουμε ότι

$$\sup \|\dot{R}_i^\delta\|_{L^p(0, T)} \leq C(p) \text{ για } p < 2.$$

Οπότε, από τη διατήρηση του όγκου και το γεγονός ότι οι ακτίνες είναι φραγμένες παίρνουμε ότι για $p < 2$ ισχύει το φράγμα

$$\left\| \frac{d}{dt} \bar{u}^\delta \right\|_{L^p(0, T)} \leq C \sup \|\dot{R}_i^\delta\|_{L^p(0, T)} \leq C.$$

Συνεπώς, $\bar{u}^\delta \in W^{1,p}(0, T)$ για $p < 2$ και η συμπίεση που προκύπτει από το θεώρημα Rellich–Kondrachov δίνει ότι το \bar{u}^δ συγκλίνει σε ένα όριο \bar{u} στον L^2 .

Έχοντας υπόψιν ότι το χημικό δυναμικό u^δ επεκτείνεται σε ολόκληρο το Ω και χρησιμοποιώντας τα λήμματα της προηγούμενης παραγράφου, η συνάρτηση ζ^δ συγκλίνει στην \bar{u} στον $L^2(\Omega)$ και η $u^\delta - \zeta^\delta$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 καθώς το $\delta \rightarrow 0$. Συνεπώς, το u^δ συγκλίνει στο \bar{u} στον $L^2(\Omega)$. Από την ισότητα ενέργειας του Λήμματος 1.1 έχουμε επιπλέον έλεγχο στη νόρμα $\|\nabla u^\delta\|_{L^2}$ και άρα έχουμε ισχυρή σύγκλιση στον $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Για τα μέτρα ν_t^δ ισχύει ότι

$$\|\nu_t^\delta\| := \sup_{\|\phi\|_{C_c} \leq 1} |\langle \phi, \nu_t^\delta \rangle| \leq 1$$

στη νόρμα του $(C_c)^*$, οπότε για μια υπακολουθία $\delta \rightarrow 0$ ισχύει ότι τα μέτρα ν_t^δ συγκλίνουν ασθενώς-* στα ν_t . Επιπλέον, για θετικές συναρτήσεις ϕ τα οριακά μέτρα ν_t είναι μη αρνητικά και προκύπτει ότι μηδενίζονται όταν δεν υπάρχουν πλέον σωματίδια στο σύστημα.

Επιλέγοντας τώρα μια συνάρτηση $\psi(t)$ που εξαρτάται μόνο από το χρόνο, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \psi(t) d\nu_t^\delta = \frac{1}{N_i} \psi(t) \sum 1 = \frac{N(t)}{N_i} \psi(t).$$

Ο λόγος N/N_i είναι το ποσοστό των ενεργών σωματιδίων στο χρόνο t . Ο λόγος αυτός είναι φραγμένος από το 1 και φθίνει, άρα είναι ομοιόμορφα φραγμένος στο χώρο $BV(0, T)$ και από τη συμπαγή εμφάνιση του $BV(0, T) \cap L^\infty(0, T)$ στον $L^2(0, T)$ συγκλίνει στον L^2 για μια υπακολουθία $\delta \rightarrow 0$ σε ένα όριο $a \in BV(0, T)$.

Αν προβάλλουμε τώρα το μέτρο ν_t στο διάστημα $[0, T]$, παίρνουμε ότι για την προβολή ισχύει

$$\text{proj}_{[0, T]} \nu_t = a(t) dt$$

και από το [23, Κεφ. 1, Θεώρ. 10] προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα για τη σύγκλιση των μέτρων. \square

Ολοκληρώνουμε με το παρακάτω θεώρημα όπου αποδεικνύεται ότι το οριακό μέτρο ν_t ικανοποιεί ασθενώς την εξίσωση LSW. Στη διατύπωση του θεωρήματος η αρχική συνθήκη ορίζεται από τη σχέση

$$\int \phi(t, R_i^\delta(t)) d\nu_0^\delta := \frac{1}{N_i} \sum \phi(0, R_i^\delta(0)).$$

Θεώρημα 1.9. Το μέτρο ν_t ικανοποιεί την εξίσωση LSW με την έννοια ότι

$$(1.16) \quad \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, R) + \left(\bar{u} - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial R} \phi(t, R) \right\} a(t) d\nu_t + \int \phi(0, R) d\nu_0 = 0$$

για ομαλές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+)$ με συμπαγή φορέα, όπου το μέσο πεδίο \bar{u} δίνεται από τη σχέση

$$\bar{u} = \frac{\int R d\nu_t}{\int R^2 d\nu_t}.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε υπολογίζοντας το όριο $\bar{u}(t)$ του μέσου πεδίου. Για μια συνεχή συνάρτηση $\phi(t)$, από τον ορισμό του \bar{u}^δ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int \phi \bar{u}^\delta \frac{R^2}{1 + \delta^\alpha R} d\nu_t^\delta &= \frac{1}{N_i} \phi \bar{u}^\delta \sum \frac{R_i^2}{1 + \delta^\alpha R_i} \\ &= \frac{1}{N_i} \phi \sum \frac{R_i}{1 + \delta^\alpha R_i} \\ &= \int \phi \frac{R}{1 + \delta^\alpha R} d\nu_t^\delta. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο $\delta \rightarrow 0$ και στα δύο μέλη, το Λήμμα 1.8 δίνει ότι

$$\bar{u} = \frac{\int R \, d\nu_t}{\int R^2 \, d\nu_t}.$$

Έστω τώρα μια ομαλή συνάρτηση ϕ με συμπαγή φορέα, όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Τότε, από το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού και το Λήμμα 1.5 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int \phi(t, R_i^\delta(t)) \, d\nu_t^\delta + \int \phi(0, R_i^\delta(0)) \, d\nu_0^\delta \\ &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, R_i^\delta(t)) + \dot{R}_i^\delta(t) \frac{\partial}{\partial R} \phi(t, R_i^\delta(t)) \right\} d\nu_t^\delta + \int \phi(0, R_i^\delta(0)) \, d\nu_0^\delta \\ &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, R_i^\delta(t)) + \left(\bar{u}^\delta - \frac{1}{R_i^\delta} \right) \frac{\partial}{\partial R} \phi(t, R_i^\delta(t)) \right\} d\nu_t^\delta + O(\delta^\gamma) \\ &\quad + \int \phi(0, R_i^\delta(0)) \, d\nu_0^\delta. \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας το όριο για μια υπακολουθία $\delta \rightarrow 0$ και χρησιμοποιώντας την ισχυρή σύγκλιση του \bar{u}^δ . \square

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι η καλή τοποθέτηση (ύπαρξη, μοναδικότητα και συνεχής εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες) της ασθενούς διατύπωσης (1.16) μπορεί να μελετηθεί με τις μεθόδους των Niethammer και Pego στα άρθρα [39, 40].

Κεφάλαιο 2

Συνθήκες Plateau για τη διανυσματική εξίσωση Allen–Cahn

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα της εξαγωγής συνθηκών για τις γωνίες που εμφανίζονται στις τριπλές συμβολές διάχυτων διεπιφανειών στον τριδιάστατο χώρο μέσω της ελλειπτικής διανυσματικής εξίσωσης Allen–Cahn

$$(2.1) \quad \Delta u - \nabla_u W(u) = 0$$

για απεικονίσεις $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και ένα δυναμικό $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρία ελάχιστα. Η διανυσματική εξίσωση (2.1) είναι αντίστοιχη της γνωστής βαθμωτής ελλειπτικής εξίσωσης

$$(2.2) \quad \Delta u - W'(u) = 0$$

για συναρτήσεις $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα δυναμικό $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με δύο ελάχιστα, την οποία εισήγαγαν οι Allen και Cahn [12] για να περιγράψουν την κίνηση του συνόρου ανάμεσα σε δύο φάσεις. Σε αυτή την περίπτωση η απεικόνιση u είναι μια παράμετρος τάξης η οποία συμβολίζει τις φάσεις που συνυπάρχουν κατά το φυσικό φαινόμενο του διαχωρισμού φάσεων. Τη διανυσματική εκδοχή εισήγαγαν οι Bronsard και Reitich [18] ως γενίκευση για περισσότερες από δύο φάσεις (βλ. επίσης Rubinstein, Sternberg και Keller [45]). Ας σημειωθεί ότι και οι δύο εξισώσεις είναι ελλειπτικές εκδοχές αντίστοιχων προβλημάτων εξέλιξης στα οποία εμφανίζεται μια μικρή παράμετρος ε που συμβολίζει το πάχος των διεπιφανειών και ότι είναι επίσης εξισώσεις Euler–Lagrange συναρτησοειδών ενέργειας, οι ελαχιστοποιητές των οποίων σχετίζονται με ελαχιστικές επιφάνειες (βλ. Modica και Mortola [32], Modica [31] και Baldo [14]).

Για το πρόβλημα των γωνιών που εμφανίζονται στην περίπτωση συμπλεγμάτων από σαπωνοειδείς μεμβράνες στις τρεις διαστάσεις, οι κλασικές συνθήκες Plateau αναφέρουν ότι

1. τρεις σαπωνοειδείς μεμβράνες ενώνονται με ομαλό τρόπο και υπό ίσες γωνίες 120 μοιρών κατά μήκος μιας καμπύλης,
2. τέσσερις τέτοιες καμπύλες ενώνονται με ομαλό τρόπο και υπό ίσες γωνίες περίπου 109 μοιρών σε ένα σημείο.

Οι παραπάνω νόμοι ισχύουν στην ισοτροπική (συμμετρική) περίπτωση των σαπωνοειδών επιφανειών, η οποία αντιστοιχεί σε συστήματα ελαχιστικών επιφανειών (βλ. Dierkes κ.ά. [22, §4.15.7]). Οι γωνίες των 120 μοιρών στην πρώτη συνθήκη είναι οι γωνίες των οποίων το συνημίτονο είναι $-\frac{1}{2}$, ίσες δηλαδή με τις γωνίες που εμφανίζονται στις ισοτροπικές τριπλές συμβολές στις δύο διαστάσεις, ενώ οι γωνίες των περίπου 109 μοιρών στη δεύτερη συνθήκη είναι οι γωνίες των οποίων το συνημίτονο είναι $-\frac{1}{3}$ (ίσες με τη λεγόμενη *γωνία Maraldi*). Στη μη ισοτροπική περίπτωση μειγμάτων ρευστών που έχουν την ιδιότητα να μην αναμειγνύονται οι παραπάνω γωνίες δεν είναι πάντα ίσες μεταξύ τους και οι τιμές τους εξαρτώνται από τους συντελεστές επιφανειακής τάσης του κάθε ρευστού, όπως στην περίπτωση συστημάτων επιφανειών σταθερής μέσης καμπυλότητας. Σε αυτή την περίπτωση οι γωνίες στις τέσσερις τριπλές συμβολές προσδιορίζουν τις γωνίες στο σημείο της τετραπλής συμβολής.

Όσον αφορά την εξίσωση (2.1), στο άρθρο [18] οι συγγραφείς απέδειξαν την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για μικρούς χρόνους για το παραβολικό διανυσματικό ε -πρόβλημα στην περίπτωση τριπλών συμβολών στο επίπεδο και χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά αναπτύγματα έδειξαν ότι η λύση διαχωρίζει το πεδίο ορισμού της σε χωρία όπου είναι περίπου ίση με ένα από τα τρία ελάχιστα του δυναμικού. Στη συνέχεια, αλλάζοντας κλίμακα χώρου γύρω από την τριπλή συμβολή και σε αργή κλίμακα χρόνου, έδειξαν επίσης ότι ο πρώτος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της λύσης είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ικανοποιεί την εξίσωση (2.1). Επιπλέον, κοντά στην τριπλή συμβολή οι διεπιφάνειες επιπεδοποιούνται (γίνονται ευθείες στις δύο διαστάσεις) και από τη συναρμογή των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων προκύπτει ότι το όριο κατά μήκος κατευθύνσεων παράλληλων σε μια διεπιφάνεια εξαρτάται μόνο από την απόσταση από αυτήν.

Για τις δύο διαστάσεις αναφέρουμε επίσης τα αυστηρά αποτελέσματα ύπαρξης των Bronsard, Gui και Schatzman [17] για δυναμικά με τρία ελάχιστα και των Alama, Bronsard και Gui [1] για δυναμικά με περισσότερα ελάχιστα, κάτω από υποθέσεις συμμετρίας (βλ. επίσης και Sáez Trumper [46]). Στις τρεις διαστάσεις οι Gui και Schatzman [27] απέδειξαν ύπαρξη λύσεων για δυναμικά με τέσσερα ελάχιστα, ξανά κάτω από υποθέσεις συμμετρίας, ενώ οι Alikakos και Fusco [10, 3, 24] απέδειξαν ύπαρξη λύσεων σε όλες τις διαστάσεις για δυναμικά με πολλά ελάχιστα, επίσης κάτω από υποθέσεις συμμετρίας (αναλλοίωτο του δυναμικού ως προς πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων). Τέτοιου είδους λύσεις διαχωρίζουν το πεδίο ορισμού τους σε χωρία όπου είναι περίπου ίσες με τα ελάχιστα του δυναμικού μέσω

επίπεδων διάχυτων διεπιφανειών. Όσον αφορά το πρόβλημα του διαχωρισμού στις τρεις διαστάσεις, η Taylor [49] ταξινομήσε όλους τους πιθανούς κώνους με αυτή την ιδιότητα και απέδειξε ότι οι μόνοι τοπικά ελαχιστοποιούντες κώνοι είναι το επίπεδο, μια τριπλή συμβολή επιπέδων που τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας υπό γωνίες 120 μοιρών και ένα σύμπλεγμα έξι επιπέδων που τέμνονται με τετραεδρική συμμετρία σε ένα σημείο, ακριβώς όπως στις συνθήκες Plateau. Αντίστοιχα αυστηρά αποτελέσματα σε παραπάνω διαστάσεις δεν είναι διαθέσιμα (βλ. Morgan [33, Κεφ. 13] για περισσότερες πληροφορίες).

Στη συνέχεια, θα περιοριστούμε στην τριδιάστατη περίπτωση και θα θεωρήσουμε ομοιόμορφα φραγμένες ολικές λύσεις της (2.1), όπως κατασκευάζονται στα άρθρα [10, 3, 24]. Θεωρώντας ένα δυναμικό W με τρία ελάχιστα, τέτοιου είδους λύσεις διαχωρίζουν το χώρο \mathbb{R}^3 σε τρία χωρία τα οποία χωρίζονται μέσω τριών επιπέδων διεπιφανειών που τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας. Την ευθεία αυτή την καλούμε *ράχη* της τριπλής συμβολής. Στη συμμετρική περίπτωση η παραπάνω διάταξη είναι ακριβώς ένας από τους δύο ιδιόμορφους ελαχιστοποιούντες κώνους για το αντίστοιχο πρόβλημα Plateau.

Όσον αφορά το πρόβλημα των συνθηκών για τις γωνίες στις τριπλές συμβολές, ένα άλλο αποτέλεσμα στο άρθρο [18] (και επίσης στο άρθρο Gui [25]) είναι η εξαγωγή της σχέσης

$$(2.3) \quad \frac{\sin \phi_1}{\sigma_{23}} = \frac{\sin \phi_2}{\sigma_{31}} = \frac{\sin \phi_3}{\sigma_{12}}$$

για τις γωνίες ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ανάμεσα στις διεπιφάνειες μιας τριπλής συμβολής στο επίπεδο, όπου οι συντελεστές σ σχετίζονται με την επιφανειακή τάση στις διεπιφάνειες μεταξύ γειτονικών φάσεων. Η σχέση αυτή ονομάζεται *νόμος του Young* από το έργο του Young [53], ο οποίος μελέτησε τη γωνία επαφής ενός σταγονιδίου που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο στερεό υπόστρωμα. Μια άλλη ονομασία είναι *τρίγωνο του Neumann* από το έργο του Neumann [35], ο οποίος χρησιμοποίησε τη σχέση αυτή για τριπλές συμβολές διεπιφανειών ανάμεσα σε ρευστά (βλ. Minkowski [30, §4]). Στις τρεις διαστάσεις οι γωνίες σε μια τριπλή συμβολή ικανοποιούν επίσης το νόμο του Young, ενώ οι γωνίες σε μια τετραπλή συμβολή είναι γεωμετρική συνέπεια των γωνιών των τεσσάρων τριπλών συμβολών που την αποτελούν (βλ. Bronsard, Garcke και Stoth [16] για τον υπολογισμό), δηλαδή για μια τετραπλή συμβολή η δεύτερη συνθήκη Plateau είναι απόρροια της πρώτης, η οποία είναι η ιστροπική εκδοχή του νόμου του Young.

Ο στόχος μας στη συνέχεια είναι να εξαγάγουμε με αυστηρό τρόπο το νόμο του Young για τριπλές συμβολές στις τρεις διαστάσεις ως ιδιότητα των λύσεων που ικανοποιούν τις παρακάτω δύο υποθέσεις (οι οποίες θα περιγραφούν ακριβέστερα στην παράγραφο 2.2.) Σημειώνουμε ότι για συμμετρικές λύσεις οι υποθέσεις αυτές είναι θεωρήματα (βλ. [10, 3, 24, 11]).

Υπόθεση 1. Στο εσωτερικό των χωρίων και κατά μήκος κατευθύνσεων που εκτείνονται από τη ράχη της τριπλής συμβολής προς το άπειρο οι λύσεις συγκλίνουν εκθετικά στα αντίστοιχα ελάχιστα του δυναμικού.

Υπόθεση 2. Στο εσωτερικό των χωρίων και κατά μήκος κατευθύνσεων που εκτείνονται στο άπειρο και παραμένουν παράλληλες σε μια διεπιφάνεια αλλά όχι παράλληλες στη ράχη της τριπλής συμβολής οι λύσεις συγκλίνουν σημειακά σε συνδέσεις, δηλαδή σε απεικονίσεις με όρισμα την απόσταση από τη διεπιφάνεια και με την ιδιότητα να συνδέουν τα ελάχιστα του δυναμικού οριακά στο συν και πλην άπειρο.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η εξίσωση (2.1) είναι μια σχέση μηδενικής απόκλισης για έναν τανυστή τάσης, ο οποίος εμφανίστηκε στο άρθρο [2] για το συγκεκριμένο πρόβλημα (βλ. και [6] για επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την προέλευσή του). Για το αντίστοιχο πρόβλημα στις δύο διαστάσεις η απόδειξη στο άρθρο [18] στηρίζεται σε ασυμπτωτική ανάλυση, ενώ η απόδειξη στο άρθρο [25] είναι πιο κοντά στο δικό μας πνεύμα αλλά χρησιμοποιεί ταυτότητες τύπου Pohozaev αντί για τον τανυστή τάσης (βλ. [6] για τη σύνδεση ανάμεσα στα δύο).

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αποτελείται από δύο παραγράφους. Στην παράγραφο 2.2 διατυπώνουμε το πρόβλημα και όλες τις απαραίτητες υποθέσεις και το γράφουμε σε μορφή μηδενικής απόκλισης μέσω του τανυστή τάσης. Στην παράγραφο 2.3 εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης σε μια μπάλα για την οποία στη συνέχεια παίρνουμε το όριο στο άπειρο, αφού πρώτα τη διαιρέσουμε σε κατάλληλα μέρη. Αυτή η διαίρεση περιλαμβάνει μια εγχείρηση γύρω από την ιδιομορφία η οποία εμφανίζεται στην τομή της επιφάνειας ολοκλήρωσης με τη ράχη της τριπλής συμβολής και μια διαίρεση του υπόλοιπου με τρόπο τέτοιο ώστε να χρησιμοποιηθούν οι υποθέσεις για τις λύσεις στο άπειρο, δηλαδή η Υπόθεση 1 μακριά από τις διεπιφάνειες και η Υπόθεση 2 σε φιξαρισμένες αποστάσεις από αυτές. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο νόμος του Young με τη μορφή μιας σχέσης ισορροπίας δυνάμεων για τις συγκαθέτους των τριών διεπιφανειών, η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση (2.3).

2.2 Διατύπωση του προβλήματος και προκαταρκτικά

Θεωρούμε την εξίσωση (2.1)

$$\Delta u - \nabla_u W(u) = 0$$

για $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\nabla_u W(u) = (\partial W / \partial u_1, \partial W / \partial u_2, \partial W / \partial u_3)$. Το δυναμικό W θεωρείται κλάσης C^2 , μη αρνητικό και με τρία μη εκφυλισμένα ολικά ελάχιστα στα σημεία a_1, a_2, a_3 , δηλαδή $W(a_1) = W(a_2) = W(a_3) = 0$ με $W(u) > 0$ αλλού. Επιπλέον, για το W έχουμε την απαίτηση να υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $W(su) \geq W(u)$ για $s \geq 1$ και $|u| = M$. Τέλος, δεν κάνουμε καμία υπόθεση συμμετρίας για το W .

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1, θεωρούμε λύσεις που διαχωρίζουν το πεδίο ορισμού τους σε τρία χωρία μέσω τριών διάχυτων επίπεδων διεπιφανειών. Διακρίνουμε τρία χωρία C_i στο \mathbb{R}^3 για $i = 1, 2, 3$, έτσι ώστε το χωρίο C_i να περιέχει το ελάχιστο a_i και Γ_{ij} να είναι η διεπιφάνεια που χωρίζει τα χωρία C_i και C_j (με $\Gamma_{ij} \equiv \Gamma_{ji}$). Για κάθε χωρίο C_i έχουμε ότι αν $x \in C_i$, τότε $\lambda x \in C_i$ για $\lambda > 0$ (ιδιότητα κώνου).

Για την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων θεωρούμε ότι η αρχή των αξόνων βρίσκεται στη ράχη της τριπλής συμβολής, την οποία ταυτίζουμε με τον άξονα x_3 , και επιπλέον ταυτίζουμε τη διεπιφάνεια Γ_{12} με το ημιεπίπεδο $x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συντεταγμένη x_1 να μετράει την απόσταση από τη διεπιφάνεια Γ_{12} . Θυμίζουμε εδώ τις σφαιρικές συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις, δηλαδή

$$x_1 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_3 = r \cos \theta_2,$$

για μια γωνία αζιμούθιου $\theta_1 \in [0, 2\pi)$, μια πολική γωνία $\theta_2 \in [0, \pi]$ και για $r \geq 0$. Με όρους του αζιμούθιου θ_1 η διεπιφάνεια Γ_{12} βρίσκεται στη γωνία $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

Οι ομοιόμορφα φραγμένες ολικές λύσεις που θεωρούμε ικανοποιούν το φράγμα

$$(2.4) \quad |u(x)| < C$$

ομοιόμορφα σε όλο το \mathbb{R}^3 . Χρησιμοποιώντας αυτό το φράγμα και γραμμική ελλειπτική θεωρία παίρνουμε επίσης το φράγμα

$$(2.5) \quad |\nabla u(x)| < C$$

ομοιόμορφα σε όλο το \mathbb{R}^3 .

Για τέτοιου είδους λύσεις έχουμε δύο υποθέσεις. Η πρώτη αφορά το γεγονός ότι οι λύσεις συγκλίνουν εκθετικά στα αντίστοιχα ελάχιστα στο εσωτερικό κάθε χωρίου. Η υπόθεση αυτή έχει επιβεβαιωθεί κάτω από απαιτήσεις συμμετρίας για το δυναμικό από διάφορους συγγραφείς (βλ. [17, 27, 10, 3, 24]) και εμείς εδώ υποθέτουμε ότι ισχύει γενικά.

Υπόθεση 1 (Εκθετική εκτίμηση). Στο εσωτερικό του χωρίου C_i ισχύει

$$(2.6) \quad |u(x) - a_i| \lesssim e^{-\text{dist}(x, \partial C_i)},$$

όπου $\partial C_i = \cup_{i \neq j} \Gamma_{ij}$.

(Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $X \lesssim Y$ για την εκτίμηση $X \leq CY$, όπου C σταθερά.)

Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι κατά μήκος κατευθύνσεων παράλληλων στις διεπιφάνειες οι λύσεις συγκλίνουν σε μονοδιάστατες ετεροκλινικές συνδέσεις $U_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ οι οποίες συνδέουν τα ελάχιστα a_i, a_j στο άπειρο με την έννοια ότι

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} U_{ij}(\eta) = a_i \quad \text{και} \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} U_{ij}(\eta) = a_j,$$

όπου η είναι η απόσταση από τη διεπιφάνεια Γ_{ij} (βλ. [48, 9, 5] για περισσότερες πληροφορίες). Η Υπόθεση 2 έχει επίσης επιβεβαιωθεί για συμμετρικά δυναμικά κάτω από επιπλέον υποθέσεις μοναδικότητας και υπερβολικότητας των συνδέσεων [11].

Υπόθεση 2 (Υπόθεση σύνδεσης). Κατά μήκος κατευθύνσεων παράλληλων σε μια διεπιφάνεια Γ_{ij} οι λύσεις συγκλίνουν σημειακά σε μια μονοδιάστατη σύνδεση $U_{ij}(\eta)$ με όρισμα την απόσταση από τη διεπιφάνεια, δηλαδή

$$(2.7) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = U_{ij}(\eta) \quad \text{για} \quad \text{φιξαρισμένες τιμές} \quad \eta := \text{dist}(x, \Gamma_{ij}).$$

Οι οριακές αυτές απεικονίσεις είναι λύσεις του αντίστοιχου χαμιλτονιανού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{U}_{ij} - \nabla W(U_{ij}) = 0$$

με την ιδιότητα να συνδέουν τα ελάχιστα του W στο άπειρο. Ορίζουμε ως δράση μιας τέτοιας σύνδεσης τη μη αρνητική ποσότητα

$$(2.8) \quad \sigma_{ij} = \sigma(U_{ij}) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} |\dot{U}_{ij}|^2 + W(U_{ij}) \right) d\eta$$

και επίσης σημειώνουμε ότι οι συνδέσεις ικανοποιούν την παρακάτω σχέση ισοκατανομής

$$(2.9) \quad \frac{1}{2} |\dot{U}_{ij}|^2 = W(U_{ij}).$$

Στη συνέχεια θα επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση (2.1) μέσω του αντίστοιχου τανυστή τάσης (βλ. [2] για περισσότερες πληροφορίες). Ορίζουμε τον τανυστή τάσης

$$(2.10) \quad T_{ij}(u) = u_{,i} \cdot u_{,j} - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right)$$

για απεικονίσεις $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $u_{,i} = \partial u / \partial x_i$ και όπου με την τελεία συμβολίζουμε το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο χώρο \mathbb{R}^m . Στις τρεις διαστάσεις (δηλαδή για $n = 3$) είναι ο 3×3 συμμετρικός πίνακας

$$T(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |u_{,1}|^2 - |u_{,2}|^2 - |u_{,3}|^2 - 2W(u) & 2u_{,1} \cdot u_{,2} & 2u_{,1} \cdot u_{,3} \\ 2u_{,2} \cdot u_{,1} & |u_{,2}|^2 - |u_{,1}|^2 - |u_{,3}|^2 - 2W(u) & 2u_{,2} \cdot u_{,3} \\ 2u_{,3} \cdot u_{,1} & 2u_{,3} \cdot u_{,2} & |u_{,3}|^2 - |u_{,1}|^2 - |u_{,2}|^2 - 2W(u) \end{pmatrix}$$

με την ιδιότητα

$$(2.11) \quad \operatorname{div} T = (\nabla u)^\top (\Delta u - \nabla_u W(u)),$$

δηλαδή ο T έχει μηδενική απόκλιση όταν εφαρμόζεται σε λύσεις της εξίσωσης (2.1).

Σημειώνουμε επίσης ότι ο T παραμένει αναλλοίωτος κάτω από στροφές του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή μετασχηματίζεται σαν τανυστική ποσότητα. Έστω ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός Q και ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $x' = Qx$. Αν u' είναι η απεικόνιση που δρα στις νέες συντεταγμένες, με $u'(x') = u(x)$, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει ότι η κλίση μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση $\nabla' u' = Q \nabla u$, όπου ο τόνος συμβολίζει ότι οι παράγωγοι υπολογίζονται στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Τότε, για το μετασχηματισμένο τανυστή T' , ο οποίος δίνεται από το μετασχηματισμό ομοιότητας

$$T' = Q T Q^\top,$$

λόγω της μορφής των στοιχείων στη σχέση (2.10) και τη συνέχεια του δυναμικού W ισχύει ότι

$$T'_{ij}(u') = u'_{,i} \cdot u'_{,j} - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2} |\nabla' u'|^2 + W(u') \right),$$

όπου ξανά ο τόνος συμβολίζει ότι ο τανυστής υπολογίζεται στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, ο μετασχηματισμένος τανυστής έχει ακριβώς την ίδια έκφραση με τον αρχικό εκτός από το γεγονός ότι δρα στο νέο σύστημα συντεταγμένων.

Τέλος, διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη δύο λήμματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Το πρώτο είναι συνέπεια της Υπόθεσης 1 και γραμμικής ελλειπτικής θεωρίας, ενώ το δεύτερο είναι συνέπεια της Υπόθεσης 2 και του θεωρήματος Arzelà–Ascoli.

Λήμμα 2.1. Οι λύσεις της εξίσωσης (2.1) ικανοποιούν την εκτίμηση κλίσης

$$(2.12) \quad |\nabla u(x)| \lesssim e^{-\text{dist}(x, \partial C_i)} \quad \text{για } x \in C_i.$$

Επιπλέον, μια παρόμοια εκτίμηση ισχύει για το δυναμικό $W(u)$, δηλαδή

$$(2.13) \quad |W(u(x))| \lesssim e^{-\text{dist}(x, \partial C_i)} \quad \text{για } x \in C_i.$$

Λήμμα 2.2. Για τις λύσεις της εξίσωσης (2.1) ισχύουν τα παρακάτω σημειακά όρια.

$$(2.14) \quad \lim u_{,1}(x) = \dot{U}(x_1) \quad \text{καθώς } x_2 \rightarrow +\infty, x_3 \rightarrow +\infty$$

και

$$(2.15) \quad \lim u_{,i}(x) = 0 \quad \text{καθώς } x_2 \rightarrow +\infty, x_3 \rightarrow +\infty, \text{ για } i = 2, 3,$$

όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας* θεωρήσαμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το x_1 να είναι η απόσταση από μια διεπιφάνεια.

2.3 Εξαγωγή του νόμου του Young

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα. Για τις γωνίες επαφής στη ράχη μιας τριπλής συμβολής τριών διεπιφανειών $\Gamma_{12}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}$ ισχύει ο νόμος του Young με τη μορφή της παρακάτω σχέσης ισορροπίας δυνάμεων, δηλαδή

$$(2.16) \quad \sigma_{12} \nu_{12} + \sigma_{23} \nu_{23} + \sigma_{31} \nu_{31} = 0,$$

όπου σ_{ij} είναι η δράση της σύνδεσης U_{ij} κάθε διεπιφάνειας Γ_{ij} και ν_{ij} η αντίστοιχη μοναδιαία συγκάθετος, δηλαδή ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι εφαπτόμενο στη διεπιφάνεια Γ_{ij} και κάθετο στο σύνορό της (στη ράχη).

* Λόγω του αναλλοίωτου της Λαπλασιανής κάτω από στροφές και της συνέχειας των W και $\nabla_u W$.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι οι λύσεις της εξίσωσης (2.1) τις οποίες θεωρούμε έχουν κατασκευαστεί ως ελαχιστοποιητές σε μπάλες (βλ. [10, 3, 24] για τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος), θεωρούμε μια μπάλα B_R με κέντρο το $(0, 0, 2R)$ έτσι ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.11), δηλαδή το γεγονός ότι ο τανυστής τάσης T έχει μηδενική απόκλιση. Έχουμε τότε ότι

$$(2.17) \quad 0 = \frac{1}{R} \int_{B_R} \operatorname{div} T \, dx = \frac{1}{R} \int_{\partial B_R} T \nu \, dS,$$

όπου ν είναι η εξωτερική μοναδιαία κάθετος στο σύνορο ∂B_R . Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\partial B_R} T \nu \, dS$$

έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε τις υποθέσεις για τις λύσεις στο άπειρο. Σημειώνουμε ότι επιλέξαμε το κέντρο της B_R με τέτοιο τρόπο ώστε για $(x_1, x_2, x_3) \in \partial B_R$ να ισχύει $x_3 \neq 0$ και $x_3 \rightarrow +\infty$ καθώς $R \rightarrow +\infty$.

Η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης στο πρόβλημά μας είναι περίπλοκη λόγω του ότι η επιφάνεια ολοκλήρωσης τέμνει τη ράχη σε δύο σημεία στα οποία δεν έχουμε πληροφορίες για τη συμπεριφορά των λύσεων. Στη συγκεκριμένη διατύπωση του προβλήματος τα δύο αυτά σημεία είναι οι δύο πόλοι της ∂B_R στα σημεία $(0, 0, R)$ και $(0, 0, 3R)$. Για να παρακάμψουμε το πρόβλημα αυτό θα κάνουμε μια εγχείρηση επιλέγοντας θόλους κατάλληλου μεγέθους γύρω από το βόρειο και το νότιο πόλο της σφαίρας. Για αυτό το σκοπό, έστω $\psi_2(R)$ μια μικρή πολική γωνία η οποία ορίζει τους θόλους \mathcal{C} (βλ. Σχήμα 2.1), όπου με \mathcal{C} συμβολίζουμε την ένωση των δύο θόλων στους πόλους. Απαιτούμε να ισχύει

$$(2.18) \quad R \sin \psi_2(R) \rightarrow +\infty \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty,$$

έτσι ώστε η απόσταση του συνόρου των θόλων από τη ράχη να αυξάνεται καθώς το $R \rightarrow +\infty$, συνθήκη η οποία επίσης δίνει ότι η γεωδαισιακή ακτίνα $R\psi_2(R)$ των θόλων αυξάνεται καθώς το $R \rightarrow +\infty$. Επιπλέον, απαιτούμε να ισχύει

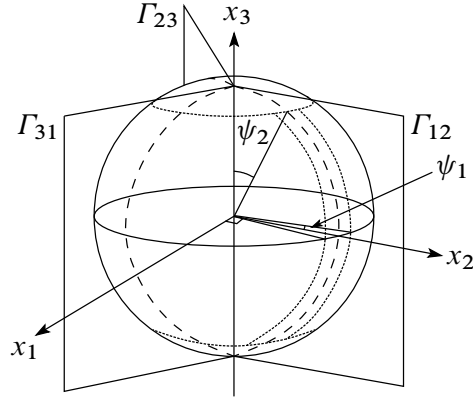
$$(2.19) \quad R\psi_2(R)^2 \rightarrow 0 \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty,$$

έτσι ώστε το κανονικοποιημένο εμβαδό των θόλων (με την παρακάτω έννοια) να ελαττώνεται καθώς το $R \rightarrow +\infty$. Πριν υπολογίσουμε το εμβαδό αυτό σημειώνουμε ότι η συνθήκη (2.19) δίνει επίσης ότι

$$(2.20) \quad \psi_2(R) \rightarrow 0 \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty.$$

Το κανονικοποιημένο εμβαδό των θόλων μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ως επιφανειακό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$\frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} dS = \frac{2}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_2} R^2 \sin \theta_2 \, d\theta_2 \, d\theta_1 = 4\pi R(1 - \cos \psi_2).$$



Σχήμα 2.1: Η σφαίρα ∂B_R με κέντρο στη ράχη, με δύο θόλους πολικής γωνίας $\psi_2(R)$ και μια λωρίδα γεωδαισιακής απόστασης $R\psi_1(R)$ εκατέρωθεν της τομής της διεπιφάνειας Γ_{12} με τη σφαίρα ∂B_R .

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (2.20) έχουμε ότι $(1 - \cos \psi_2(R)) = O(\psi_2(R)^2)$, η οποία μέσω της (2.19) δίνει ότι

$$(2.21) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} dS = 0.$$

Για να συνοψίσουμε, επιλέξαμε το μέγεθος των θόλων αρκετά μικρό ώστε να μην παίζει ρόλο στην ολοκλήρωση, αλλά ταυτόχρονα αρκετά μεγάλο ώστε να βρισκόμαστε πάντα μακριά από την ιδιομορφία της ράχης. Ως αποτέλεσμα, για το ολοκλήρωμα του γινομένου $T\nu$ στους θόλους \mathcal{C} έχουμε την εκτίμηση

$$\left| \frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} T\nu dS \right| \leq \frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} |T||\nu| dS \lesssim \frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} dS,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα φράγματα (2.4), (2.5) και την εκτίμηση (2.13) του Λήμματος 2.1 για να φράξουμε τη νόρμα Frobenius $|T|$ με μια σταθερά. Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση (2.21) παίρνουμε τελικά ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\mathcal{C}} T\nu dS = 0.$$

Στην υπόλοιπη σφαίρα θα εργαστούμε ξεχωριστά για κάθε διεπιφάνεια που την τέμνει. Για τη διεπιφάνεια Γ_{12} , η οποία βρίσκεται σε γωνία αζιμούθιου $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, εργαζόμαστε με το σφαιρικό τομέα

$$\mathcal{S} = \left\{ (\theta_1, \theta_2, r) \mid \frac{\pi}{2} - \delta \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}$$

για μια σταθερή γωνία δ , έτσι ώστε καμία άλλη διεπιφάνεια να μην τέμνει τον τομέα. Για να μελετήσουμε το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})} T\nu dS$$

διακρίνουμε δύο μέρη στο σύνολο $\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})$, μια περιοχή γύρω από το μεσημβρινό στην τομή της διεπιφάνειας με τη σφαίρα και το υπόλοιπο. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{N} \subset \mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})$ έτσι ώστε \mathcal{N} να είναι η λωρίδα που περιέχεται ανάμεσα σε δύο επίπεδα παράλληλα στη διεπιφάνεια Γ_{12} , ένα στο χωρίο C_1 και ένα στο C_2 , και σε ίση απόσταση $R \sin \psi_1(R)$ εκατέρωθεν της (βλ. Σχήμα 2.1). Για τη γωνία $\psi_1(R)$ απαιτούμε να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(2.22) \quad \psi_1(R) < \psi_2(R) \text{ με } \sqrt{2} \sin \psi_1(R) < \sin \psi_2(R),$$

έτσι ώστε η γωνία αξιμούθιου ψ_1 που ορίζει το πάχος της λωρίδας \mathcal{N} στον ισημερινό της ∂B_R να είναι αυστηρά μικρότερη από την πολική γωνία ψ_2 που ορίζει τους θόλους. Αυτή η συνθήκη αναγκάζει τη λωρίδα \mathcal{N} να είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})$. Επιπλέον, απαιτούμε ότι

$$(2.23) \quad R \sin \psi_1(R) \rightarrow +\infty \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty,$$

έτσι ώστε η απόσταση της διεπιφάνειας από τα δύο επίπεδα που ορίζουν την \mathcal{N} να αυξάνεται καθώς το $R \rightarrow +\infty$. Από τις συνθήκες (2.22) και (2.20) έχουμε επίσης ότι

$$(2.24) \quad \psi_1(R) \rightarrow 0 \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty.$$

Ένα παράδειγμα γωνιών ψ_1, ψ_2 που ικανοποιούν όλες τις παραπάνω απαιτήσεις είναι

$$\psi_1(R) = R^{-4/5} \text{ και } \psi_2(R) = R^{-3/4}$$

με τη συνθήκη (2.22) να ισχύει για $R > 1025$ για τη συγκεκριμένη επιλογή.

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω διαμερισμό του συνόλου $\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})$,

$$\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C}) = \mathcal{N} \cup ((\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})) \setminus \mathcal{N}),$$

έχουμε την εκτίμηση

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \left| \frac{1}{R} \int_{(\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})) \setminus \mathcal{N}} T \nu \, dS \right| &\leq \frac{1}{R} \int_{(\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})) \setminus \mathcal{N}} |T| |\nu| \, dS \\ &\lesssim \frac{1}{R} \int_{(\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})) \setminus \mathcal{N}} e^{-\text{dist}(x, \Gamma_{ij})} \, dS \\ &\lesssim R e^{-R \sin \psi_1(R)} \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση των εκτιμήσεων (2.12), (2.13) του Λήμματος 2.1 για την εκτίμηση της νόρμας $|T|$ από το εκθετικό και λόγω του γεγονότος ότι το χωρίο της ολοκλήρωσης είναι της τάξης $O(R^2)$. Τελικά, παίρνοντας το όριο καθώς το $R \rightarrow +\infty$ και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (2.23) έχουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{(\mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{C})) \setminus \mathcal{N}} T \nu \, dS = 0.$$

Στρεφόμαστε τώρα στο τελευταίο κομμάτι, που είναι το ολοκλήρωμα στη λωρίδα \mathcal{N} . Παραμετροποιούμε την \mathcal{N} ως το γράφημα της συνάρτησης

$$f_R(x_1, x_3) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - (x_3 - 2R)^2}$$

για $x_1 \in (-R \sin \psi_1, R \sin \psi_1)$, $x_2 \in \left(R \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}, R \right)$ και $x_3 \in (2R - R \cos \psi_2, 2R + R \cos \psi_2)$, όπου το σημείο $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ είναι η αρχή των αξόνων, η οποία δεν είναι το κέντρο της σφαίρας. Ορίζουμε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ και $y_3 = x_3 - 2R$, έτσι ώστε να ισχύει $(y_1, y_2, y_3) \in \partial B_R$ με $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2$. Τότε, η \mathcal{N} είναι το γράφημα της συνάρτησης

$$f_R(y_1, y_3) = \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_3^2}$$

για

$$(2.26) \quad \begin{cases} y_1 \in (-R \sin \psi_1, R \sin \psi_1), \\ y_2 \in \left(R \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}, R \right), \\ y_3 \in (-R \cos \psi_2, R \cos \psi_2). \end{cases}$$

Για το επιφανειακό στοιχείο υπολογίζουμε ότι

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_R}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_R}{\partial y_3} \right)^2} dy_3 dy_1 = \frac{R}{y_2} dy_3 dy_1,$$

όπου $y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2 - y_3^2}$, ενώ η εξωτερική μοναδιαία κάθετος είναι

$$v = \frac{y}{R}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την παραμετροποίηση το ολοκλήρωμα στην \mathcal{N} γράφεται

$$(2.27) \quad \frac{1}{R} \int_{\mathcal{N}} T v dS = \frac{1}{R} \int_{-R \sin \psi_1}^{R \sin \psi_1} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} T(v) \frac{y}{y_2} dy_3 dy_1,$$

όπου

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(y_1, y_2, y_3 + 2R) =: v(y_1, y_2, y_3)$$

και $v_i(y) = u_i(x)$ για $i = 1, 2, 3$, οπότε $T(v(y)) = T(u(x))$.

Για να πάρουμε το όριο καθώς το $R \rightarrow +\infty$ στην εξίσωση (2.27) και να εφαρμόσουμε τις Υποθέσεις 1 και 2 χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Οι συνιστώσες της υπό ολοκλήρωση διανυσματικής ποσότητας στο δεξιό μέλος της σχέσης (2.27) δίνονται από τη σχέση

$$(2.28) \quad \left(T(v) \frac{y}{y_2} \right)_i = T_{ij}(v) \frac{y_j}{y_2} \text{ για } i = 1, 2, 3$$

χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση. Για να ελέγξουμε αν εφαρμόζεται η κυριαρχημένη σύγκλιση για κάθε συνιστώσα γράφουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{R} \chi_{[-R \sin \psi_1, R \sin \psi_1]} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} T_{ij}(v) \frac{y_j}{y_2} dy_3 \right) dy_1,$$

όπου χ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση, και θα θέλαμε να δείξουμε ότι η ποσότητα εντός παρενθέσεων φράσσεται από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση του y_1 . Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις (2.12) και (2.13) του Λήμματος 2.1, στην \mathcal{N} ισχύει η εκτίμηση $|T_{ij}(v)| \lesssim e^{-|y_1|}$ η οποία δίνει ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R} \chi_{[-R \sin \psi_1, R \sin \psi_1]} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} T_{ij}(v) \frac{y_j}{y_2} dy_3 \right| &\leq \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} |T_{ij}(v)| \frac{|y_j|}{y_2} dy_3 \\ &\lesssim \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} e^{-|y_1|} \frac{|y_j|}{y_2} dy_3 \\ &= e^{-|y_1|} \left(\frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{|y_j|}{y_2} dy_3 \right). \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$I_j = \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{|y_j|}{y_2} dy_3 \text{ για } j = 1, 2, 3$$

ισχυρίζομαστε ότι $I_j \leq 2$ για $j = 1, 2, 3$ και συνεπώς η κυριαρχημένη σύγκλιση ισχύει στο όριο $R \rightarrow +\infty$.

Για $j = 1$, χρησιμοποιώντας τις ακραίες τιμές των y_1, y_2 στα διαστήματα (2.26) και τη συνθήκη (2.22) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{|y_1|}{y_2} dy_3 \leq \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{R \sin \psi_1}{R \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}} dy_3 \\ &< \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_1} dy_3 = \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} dy_3 = 2 \cos \psi_2 \leq 2, \end{aligned}$$

λόγω του ότι ισχύει $\sin \psi_1 < \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}$ από τη συνθήκη (2.22).

Για $j = 2$, έχουμε ότι

$$I_2 = \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{|y_2|}{y_2} dy_3 = \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} dy_3 = 2 \cos \psi_2 \leq 2,$$

λόγω του ότι ισχύει $y_2 > 0$ στην \mathcal{N} .

Τέλος για $j = 3$, αλλάζουμε μεταβλητές

$$\tilde{y}_3 = \frac{1}{R} y_3 \text{ με } d\tilde{y}_3 = \frac{1}{R} dy_3$$

και χρησιμοποιώντας τις ακραίες τιμές του y_1 στα διαστήματα (2.26) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{R} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{|y_3|}{y_2} dy_3 = \int_{-\cos \psi_2}^{\cos \psi_2} \frac{R|\tilde{y}_3|}{y_2} d\tilde{y}_3 = \int_{-\cos \psi_2}^{\cos \psi_2} \frac{R|\tilde{y}_3|}{\sqrt{R^2 - y_1^2 - R^2 \tilde{y}_3^2}} d\tilde{y}_3 \\ &\leq \int_{-\cos \psi_2}^{\cos \psi_2} \frac{|\tilde{y}_3|}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \tilde{y}_3^2}} d\tilde{y}_3 = 2 \int_0^{\cos \psi_2} \frac{\tilde{y}_3}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \tilde{y}_3^2}} d\tilde{y}_3, \end{aligned}$$

λόγω του ότι η συνάρτηση $|\tilde{y}_3|/\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \tilde{y}_3^2}$ είναι άρτια. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\cos \psi_2} \frac{\tilde{y}_3}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \tilde{y}_3^2}} d\tilde{y}_3 &= -2 \int_0^{\cos \psi_2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \tilde{y}_3^2} \right)' d\tilde{y}_3 \\ &= -2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_1 - \cos^2 \psi_2} + 2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_1} \\ &= 2 \cos \psi_1 - 2 \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1} \leq 2 \cos \psi_1 \leq 2. \end{aligned}$$

Για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του ορίου καθώς το $R \rightarrow +\infty$ στη σχέση (2.27) διακρίνουμε τα παρακάτω όρια στην \mathcal{N} ως συνέπεια της Υπόθεσης 2 και του Λήμματος 2.2.

$$(2.29) \quad \begin{cases} \lim_{R \rightarrow +\infty} v(y) = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow +\infty \\ x_3 \rightarrow +\infty}} u(x) = U_{12}(x_1), \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} v_{,1}(y) = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow +\infty \\ x_3 \rightarrow +\infty}} u_{,1}(x) = \dot{U}_{12}(x_1), \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} v_{,2}(y) = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow +\infty \\ x_3 \rightarrow +\infty}} u_{,2}(x) = 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} v_{,3}(y) = \lim_{\substack{x_2 \rightarrow +\infty \\ x_3 \rightarrow +\infty}} u_{,3}(x) = 0. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις ακραίες τιμές των διαστημάτων στη σχέση (2.26) και τη συνθήκη (2.22) έχουμε επίσης ότι στην \mathcal{N} ισχύει

$$(2.30) \quad \frac{1}{R} \left| \frac{y_1}{y_2} \right| \leq \frac{1}{R} \frac{R \sin \psi_1}{R \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}} < \frac{1}{R} \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_1} \rightarrow 0 \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty,$$

$$(2.31) \quad \frac{1}{R} \left| \frac{y_3}{y_2} \right| \leq \frac{1}{R} \frac{R \cos \psi_2}{R \sqrt{\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1}} < \frac{1}{R} \frac{\cos \psi_2}{\sin \psi_1} \rightarrow 0 \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty,$$

όπου στο τελευταίο όριο χρησιμοποιήσαμε επίσης τη συνθήκη (2.23) για το όριο του παρονομαστή. Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (2.30), (2.31) και λόγω του

ότι τα στοιχεία του T είναι φραγμένα από μια σταθερά από τις σχέσεις (2.4), (2.5) και την εκτίμηση (2.13) του Λήμματος 2.1 έχουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} T(v) \frac{y}{y_2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} (T_{12}, T_{22}, T_{32})^\top,$$

δηλαδή μόνο οι συνιστώσες για την τιμή $j = 2$ στη σχέση (2.28) δεν μηδενίζονται στο όριο. Όμως χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.29) έχουμε επιπλέον ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} T_{12} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} v_{,1} \cdot v_{,2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} T_{32} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} v_{,3} \cdot v_{,2} = 0.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\mathcal{N}} T \nu \, dS = \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{-R \sin \psi_1}^{R \sin \psi_1} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} T_{22}(v) \, dy_3 \, dy_1 \right) (0, 1, 0)^\top.$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της συνιστώσας T_{22} στο τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{-R \sin \psi_1}^{R \sin \psi_1} \int_{-R \cos \psi_2}^{R \cos \psi_2} \frac{1}{2} \left(|v_{,2}|^2 - |v_{,1}|^2 - |v_{,3}|^2 - 2W(v) \right) dy_3 \, dy_1$$

μέσω της αλλαγής μεταβλητών $y_3 = R \tilde{y}_3$, η οποία δίνει

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R \sin \psi_1}^{R \sin \psi_1} \int_{-\cos \psi_2}^{\cos \psi_2} \frac{1}{2} \left(|v_{,2}|^2 - |v_{,1}|^2 - \frac{1}{R^2} |v_{,3}|^2 - 2W(v) \right) d\tilde{y}_3 \, dy_1$$

κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού για την παράγωγο $v_{,3}$. Περνώντας το όριο στο τελευταίο ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (2.20) και (2.23), τα όρια στη σχέση (2.29) δίνουν ότι

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 - \left(\frac{1}{2} |\dot{U}_{12}(y_1)|^2 + W(U_{12}(y_1)) \right) d\tilde{y}_3 \, dy_1 \\ &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} |\dot{U}_{12}(y_1)|^2 + W(U_{12}(y_1)) \right) dy_1 \\ &= -2\sigma_{12}. \end{aligned}$$

Δείξαμε δηλαδή ότι για τον τομέα \mathcal{S} εκατέρωθεν της διεπιφάνειας Γ_{12} ισχύει ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\mathcal{S}} T \nu \, dS = -2\sigma_{12} \nu_{12},$$

όπου $\nu_{12} = (0, 1, 0)^\top$.

Λόγω του γεγονότος ότι ο τανυστής τάσης T είναι αναλλοίωτος κάτω από στροφές, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία και για τις υπόλοιπες δύο διεπιφάνειες χρησιμοποιώντας κατάλληλα στραμμένα συστήματα συντεταγμένων και κατάλληλους

σφαιρικούς τομείς (ώστε να καλύψουμε ολόκληρη τη σφαίρα) καταλήγοντας στη σχέση

$$\sigma_{12}\nu_{12} + \sigma_{23}\nu_{23} + \sigma_{31}\nu_{31} = 0,$$

κάνοντας χρήση της σχέσης (2.17), όπου ν_{ij} είναι οι συγκάθετοι των αντίστοιχων διεπιφανειών Γ_{ij} . \square

Σημειώνουμε ότι η σχέση ισορροπίας δυνάμεων (2.16) είναι ισοδύναμη με το νόμο του Young (2.3). Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.16) με τη μοναδιαία κάθετο κάθε διεπιφάνειας.

Βιβλιογραφία

- [1] S. Alama, L. Bronsard, C. Gui. Stationary layered solutions in \mathbb{R}^2 for an Allen–Cahn system with multiple well potential. *Calc. Var.* **5** No. 4 (1997), 359–390.
- [2] N. D. Alikakos. Some basic facts on the system $\Delta u - W_u(u) = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** No. 1 (2011), 153–162.
- [3] N. D. Alikakos. A new proof for the existence of an equivariant entire solution connecting the minima of the potential for the system $\Delta u - W_u(u) = 0$. *Comm. Partial Diff. Eqs.* **37** No. 12 (2012), 2093–2115.
- [4] N. D. Alikakos, P. Antonopoulos, A. Damialis. Plateau angle conditions for the vector-valued Allen–Cahn equation. Προδημοσίευση.
- [5] N. D. Alikakos, S. I. Betelú, X. Chen. Explicit stationary solutions in multiple well dynamics and non-uniqueness of interfacial energy densities. *Eur. J. Appl. Math.* **17** No. 5 (2006), 525–556.
- [6] N. D. Alikakos, A. C. Faliagas. The stress-energy tensor and Pohozaev’s identity for systems. *Acta Math. Sci.* **32** No. 1 (2012), 433–439.
- [7] N. D. Alikakos, G. Fusco. The equations of Ostwald ripening for dilute systems. *J. Stat. Phys.* **95** No. 5/6 (1999), 851–866.
- [8] N. D. Alikakos, G. Fusco. Ostwald ripening for dilute systems under quasi-stationary dynamics. *Comm. Math. Phys.* **238** No. 3 (2003), 429–479.
- [9] N. D. Alikakos, G. Fusco. On the connection problem for potentials with several global minima. *Indiana Univ. Math. J.* **57** No. 4 (2008), 1871–1906.
- [10] N. D. Alikakos, G. Fusco. Entire solutions to equivariant elliptic systems with variational structure. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **202** No. 2 (2011), 567–597.
- [11] N. D. Alikakos, G. Fusco. On the asymptotic behavior of symmetric solutions of the elliptic system $\Delta u = W_u(u)$ in unbounded domains. Προδημοσίευση.

- [12] S. M. Allen, J. W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall.* **27** No. 6 (1979), 1085–1095.
- [13] Π. Αντωνόπουλος. *Ελλειπτικά συστήματα μεταβολικής μορφής με μη κυρτές μη γραμμικότητες*. Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2011.
- [14] S. Baldo. Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn–Hilliard fluids. *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire* **7** No. 2 (1990), 67–90.
- [15] N. C. Bartelt, W. Theis, R. M. Tromp. Ostwald ripening of two-dimensional islands on Si(001). *Phys. Rev. B* **54** (1996), 11741–11751.
- [16] L. Bronsard, H. Garcke, B. Stoth. A multi-phase Mullins–Sekerka system: matched asymptotic expansions and an implicit time discretisation for the geometric evolution problem. *Proc. R. Soc. Edinb.* **128A** No. 3 (1998), 481–506.
- [17] L. Bronsard, C. Gui, M. Schatzman. A three-layered minimizer in \mathbb{R}^2 for a variational problem with a symmetric three-well potential. *Comm. Pure Appl. Math.* **49** No. 7 (1996), 677–715.
- [18] L. Bronsard, F. Reitich. On three-phase boundary motion and the singular limit of a vector-valued Ginzburg–Landau equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **124** No. 4 (1993), 355–379.
- [19] D. Cioranescu, F. Murat. A strange term coming from nowhere. *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, A. Cherkaev, R. Kohn επιμ. Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 45–94.
- [20] S. Dai, R. L. Pego. Universal bounds on coarsening rates for mean-eld models of phase transitions. *SIAM J. Math. Anal.* **37** No. 2 (2005), 347–371.
- [21] A. Damialis. The Lifshitz–Slyozov–Wagner equation for reaction-controlled kinetics. *Proc. R. Soc. Edinburgh* **140A** No. 2 (2010), 273–289.
- [22] U. Dierkes, S. Hildenbrandt, F. Sauvigny. *Minimal surfaces I. Boundary value problems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **339**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [23] L. C. Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [24] G. Fusco. Equivariant entire solutions to the elliptic system $\Delta u = W_u(u)$ for general G -invariant potentials. Προδημοσίευση.
- [25] C. Gui. Hamiltonian identities for elliptic partial differential equations. *J. Funct. Anal.* **254** No. 4 (2008), 904–933.

- [26] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [27] C. Gui, M. Schatzman. Symmetric quadruple phase transitions. *Indiana Univ. Math. J.* **57** No. 2 (2008), 781–836.
- [28] M. E. Gurtin. *Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane*. The Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [29] I. M. Lifshitz, V. V. Slyozov. The kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions. *J. Phys. Chem. Solids* **19** (1961), 35–50.
- [30] H. Minkowski. Kapillarität. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* V (1906), 558–613.
- [31] L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **98** (1987), 123–142.
- [32] L. Modica, S. Mortola. Un esempio di Γ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B* **14** No. 5 (1977), 285–299.
- [33] F. Morgan. *Geometric measure theory: A beginner's guide*. Academic Press, 2009.
- [34] W. W. Mullins, R. F. Sekerka. Morphological stability of a particle growing by diffusion or heat flow. *J. Appl. Phys.* **34** No. 2 (1963), 323–329.
- [35] F. Neumann. *Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität*. A. Wangerin επιμ. Teubner, Leipzig, 1894.
- [36] B. Niethammer. Derivation of the LSW-theory for Ostwald ripening by homogenization methods. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **147** (1999), 119–178.
- [37] B. Niethammer. The LSW model for Ostwald ripening with kinetic undercooling. *Proc. R. Soc. Edinburgh* **130A** No. 6 (2000), 1337–1361.
- [38] B. Niethammer, F. Otto. Ostwald ripening: The screening length revisited. *Calc. Var.* **13** No. 1 (2001), 33–68.
- [39] B. Niethammer, R. L. Pego. On the initial-value problem in the Lifshitz–Slyozov–Wagner theory of Ostwald ripening. *SIAM J. Math. Anal.* **31** No. 3 (2000), 467–485.
- [40] B. Niethammer, R. L. Pego. Well-posedness for measure transport in a family of nonlocal domain coarsening models. *Indiana Univ. Math. J.* **54** No. 2 (2005), 499–530.
- [41] B. Niethammer, J. J. L. Velázquez. Homogenization in coarsening systems I: Deterministic case. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **14** No. 8 (2004), 1211–1233.

- [42] B. Niethammer, J. J. L. Velázquez. Homogenization in coarsening systems II: Stochastic case. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **14** No. 9 (2004), 1–24.
- [43] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- [44] L. Ratke, P. W. Voorhees. *Growth and coarsening: Ostwald ripening in material processing*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [45] J. Rubinstein, P. Sternberg, J. Keller. Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening. *SIAM J. Appl. Math.* **49** No. 1 (1989), 116–133.
- [46] M. Saez Trumper. Existence of a solution to a vector-valued Allen–Cahn equation with a three well potential. *Indiana Univ. Math. J.* **58** No. 1 (2009), 213–268.
- [47] V. V. Slezov, V. V. Sagalovich. Diffusive decomposition of solid solutions. *Sov. Phys. Usp.* **30** No. 1 (1987), 23–45.
- [48] P. Sternberg. Vector-valued local minimizers of nonconvex variational problems. *Rocky Mt. J. Math.* **21** No. 2 (1991), 799–807.
- [49] J. E. Taylor. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. *Ann. Math.* **103** (1976), 489–539.
- [50] J. J. L. Velázquez. On the effect of stochastic fluctuations in the dynamics of the Lifshitz–Slyozov–Wagner model. *J. Stat. Phys.* **99** No. 1/2 (2000), 231–252.
- [51] P. W. Voorhees. The theory of Ostwald ripening. *J. Stat. Phys.* **38** No. 1/2 (1985), 231–252.
- [52] C. Wagner. Theorie der Alterung von Niederschlägen durch Umlösen. *Z. Elektrochem.* **65** No. 7/8 (1961), 581–591.
- [53] T. Young. An essay on the cohesion of fluids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **95** (1805), 65–87.