

ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟ-ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ ΝΕΥΤΩΝΙΚΟΥ Η ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΥΜΕΝΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Γεώργιος Καραπέτσας¹ & Βασίλης Μποντόζογλου²
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 38334 Βόλος
gkarapetsas@gmail.com
bont@mie.uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα εργασία μελετάται υπολογιστικά η μη-γραμμική δυναμική της διεπιφάνειας μεταξύ ενός ιξώδο-ελαστικού και ενός νευτωνικού ρευστού που είναι εκτεθειμένα σε περιοδικό ηλεκτρικό πεδίο. Η υπολογιστική προσομοίωση γίνεται με επίλυση με τη μέθοδο Galerkin πεπερασμένων στοιχείων των εξισώσεων διατήρησης μάζας και ορμής και της εξίσωσης Laplace για το ηλεκτρικό δυναμικό. Οι παραπάνω εξισώσεις επιλύονται σε συνδυασμό με τις εξισώσεις του πλέγματος για την παρακολούθηση του χρονομεταβαλλόμενο φυσικού πεδίου και πραγματοποιούμε προσομοιώσεις λαβάνοντας πλήρως υπόψη τη ροή και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε όλες τις φάσεις. Η ιξώδοελαστική συμπεριφορά του πολυμερικού υλικού μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας το καταστικό μοντέλο Phan-Thien and Tanner (PTT). Πραγματοποιήθηκε μια πλήρης παραμετρική μελέτη για την επίδραση των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των ρευστών, της εφαρμοζόμενης τάσης καθώς και των διαφόρων ρεολογικών ιδιοτήτων του πολυμερικού υμένα.

Λέξεις Κλειδιά: ηλεκτρο-υδροδυναμική αστάθεια, ιξώδοελαστικό ρευστό, ηλεκτρικό πεδίο

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο με διεύθυνση κάθετη στην επίπεδη διεπιφάνεια δύο ρευστών είναι γνωστό ότι προκαλεί μία αστάθεια γνωστή ως ηλεκτρο-υδροδυναμική. Το νεώτερο ενδιαφέρον στο φαινόμενο οφείλεται στην δυνατότητα χρήσης της αστάθειας σε μικρο-κλίμακα και νανο-κλίμακα για τη δημιουργία πολύ κανονικών δομών με αρκετές εφαρμογές στη βιομηχανία. Όπως είναι αναμενόμενο η διέγερση αυτή έχει τραβήξει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητικών ομάδων τόσο σε πειραματικό (Schäffer et al. 2000, 2001, Lin et al. 2001, 2002) όσο και σε θεωρητικό επίπεδο (Pease & Russel 2002, Shankar & Sharma 2004, Craster & Matar 2005, Wu et al. 2005, Roberts & Kumar 2009, Espin et al. 2013).

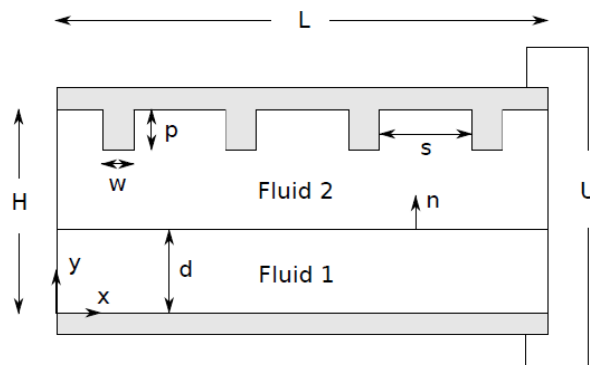
Η διάταξη που έχει μελετηθεί περισσότερο αφορά επίπεδα ηλεκτρόδια που περιέχουν μεταξύ τους δύο νευτωνικά ρευστά, ωστόσο είναι γνωστό από τη βιβλιογραφία ότι η χρήση, στη θέση του επιπέδου, ενός περιοδικά διαμορφωμένου ηλεκτροδίου παρέχει καταρχήν την δυνατότητα για μείωση των διαστάσεων έως την νάνο-κλίμακα. Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί λιγότερο και έχει ως

ιδιαιτερότητα την μη-ύπαρξη βασικής κατάστασης ισορροπίας επειδή το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομοιόμορφο αλλά περιοδικό (Heier et al 2009).

Η διεπιφανειακή αστάθεια ενός Νευτωνικού υμένα έχει μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία και οι περισσότερες παράμετροι που την επηρεάζουν είναι πλέον κατανοητά. Το ίδιο όμως δεν συμβαίνει για την περίπτωση υγρών με περίπλοκη ρεολογική συμπεριφορά τα οποία έχουν λάβει πολύ μικρότερη προσοχή στη βιβλιογραφία. Ωστόσο πρέπει να αναφερθεί ότι οι πιθανότερες εφαρμογές αφορούν πολυμερικούς υμένες οι οποίοι παραμορφώνονται και στη συνέχεια ψύχονται για την διατήρηση της μικροδομής. Οι πολυμερικοί υμένες στις περισσότερες περιπτώσεις παρουσιάζουν ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Στην περίπτωση επίπεδων ηλεκτροδίων έχουν γίνει προσπάθειες για τη μελέτη της επίδρασης της ιξωδοελαστικότητας κάνοντας χρήση του καταστατικού μοντέλου Oldroyd-B και πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας στο όριο πολύ μικρών διαταραχών από τη βασική κατάσταση ισορροπίας (Wu & Chou 2005, Tomar et al. 2007, Espin et al. 2013). Οι μελέτες αυτές κατέδειξαν ότι στην περίπτωση επίπεδων ηλεκτροδίων οι ρεολογικές ιδιότητες του υλικού επηρεάζουν μεν τον ρυθμό αύξησης της διαταραχής αλλά αφήνουν ανεπηρέαστο το μήκος κύματος της διαταραχής. Στην περίπτωση των επίπεδων ηλεκτροδίων η βασική κατάσταση ισορροπίας είναι ένα στατικό φιλμ, ωστόσο στην περίπτωση διαμορφωμένων ηλεκτροδίων η μη ύπαρξη βασικής κατάστασης ισορροπίας καθιστά απαραίτητη τη διενέργεια χρονομεταβαλλόμενων προσομοιώσεων για τη μελέτη της ευστάθειας του συστήματος.

Οι χρονομεταβαλλόμενες προσομοιώσεις επιπλέον επιτρέπουν τη μελέτη της συμπεριφοράς του υλικού στη μη γραμμική περιοχή και έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν για την περίπτωση Νευτωνικών ρευστών κάνοντας χρήση κυρίως τη θεωρία λίπανσης (Craster & Matar 2005, Bandyopahyay et al 2012) αποκαλύπτοντας την επίδραση του αρχικού πάχους του υμένα καθώς και την επίδραση της γεωμετρίας ενός διαμορφωμένου ηλεκτροδίου στην τελική παραμόρφωση της διεπιφάνειας. Είναι χρήσιμο ωστόσο να σημειωθεί ότι οι Pease & Russel (2003, 2004) υποστήριξαν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις των πειραμάτων που έχουν διεξαχθεί στη βιβλιογραφία η θεωρία λίπανσης δεν είναι σε ισχύ και έδειξαν ότι μοντέλα με πιο γενική ισχύ δίνουν πιο πιστά αποτελέσματα. Από την άλλη, είναι επίσης γνωστό ότι στην περίπτωση των ιξωδοελαστικών υλικών είναι γνωστό ότι η θεωρία της λίπανσης μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική υποεκτίμηση των κάθετων τάσεων.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της μη-γραμμικής εξέλιξης της ροής ενός ιξωδοελαστικού υμένα υπό την επίδραση ενός ετερογενούς ηλεκτρικού πεδίου, λαμβάνοντας πλήρως υπόψη την επίδραση της ελαστικότητας του υλικού. Αποφεύγουμε να κάνουμε οποιαδήποτε παραδοχή, όπως π.χ. χρήση της θεωρίας λίπανσης, προκειμένου να περιγράψουμε τη ροή με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια. Πραγματοποιούμε διδιάστατες χρονομεταβαλλόμενες προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με τη χρήση ενός ελλειπτικού σχήματος δημιουργίας πλέγματος για τον προσδιορισμό της θέσης της διεπιφάνειας. Η ιξωδοελαστικές ιδιότητες του υλικού μοντελοποιούνται με το καταστατικό μοντέλο Phan-Thien Tanner και πραγματοποιούμε μια πλήρη παραμετρική ανάλυση των διαφόρων γεωμετρικών και ρεολογικών παραμέτρων για τη διερεύνηση των ελάχιστων κατασκευαστικών ορίων της διεργασίας.



Σχήμα 1. Η διάταξη ηλεκτροδίων και ρευστών που μελετάται.

2. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε τη ροή δύο διηλεκτρικών ρευστών που περικλείονται μεταξύ δύο ηλεκτροδίων. Τα ηλεκτρόδια μπορεί να είναι είτε επίπεδα είτε διαμορφωμένα με περιοδική δομή όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Το ρευστό 1 είναι ιζώδοελαστικό και περιβάλλεται από ένα Νευτωνικό ρευστό (ρευστό 2). Αρχικά τα δύο ρευστά είναι ακίνητα και η μεταξύ τους διεπιφάνεια είναι επίπεδη. Τα ρευστά είναι ασυμπίεστα με σταθερή πυκνότητα, ρ_i , διηλεκτρική σταθερά, ε_i , $i = 1, 2$. Το πολυμερικό φιλμ έχει χρόνο χαλάρωσης λ και ένα ολικό δυναμικό ιζώδες $\mu_l = \mu_s + \mu_p$, όπου μ_s και μ_p το Νευτωνικό και το πολυμερικό μέρος, αντίστοιχα, ενώ το ρευστό 2 έχει σταθερό ιζώδες, μ_2 . Η επιφανειακή τάση της διεπιφάνειας υγρού-υγρού είναι σταθερή και συμβολίζεται με γ . Μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων θεωρούμε σταθερό δυναμικό U .

Αδιαστατοποιούμε τις μεταβλητές x και y με τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων, H , την ταχύτητα \underline{v} με την χαρακτηριστική ταχύτητα $v = \frac{\varepsilon_o U^2}{\mu_1 H}$, την πίεση και τις τάσεις με $\frac{\mu_1 V}{H}$ και το ηλεκτρικό δυναμικό με τη διαφορά δυναμικού U . Μετά από την αδιαστατοποίηση προκύπτουν οι παρακάτω αδιάστατοι αριθμοί:

Ο αριθμός Reynolds $Re = \frac{\rho_1 v H}{\mu_1}$, ο αριθμός Weissenberg $wi = \frac{\lambda v}{H}$, ο τριχοειδής αριθμός

$Ca = \frac{\mu_1 V}{\gamma}$, ο λόγος του Νευτωνικού ιζώδους ως προς το συνολικό $\beta = \frac{\mu_s}{\mu_1}$, καθώς και οι αδιάστατοι

λόγοι πυκνοτήτων, $D_i = \frac{\rho_i}{\rho_1}$, και ιζωδών, $M_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}$, $i = 1, 2$. μήκη και $\varepsilon_2 = \frac{L_2}{R}$. Οι αδιάστατες

εξισώσεις που προκύπτουν τελικά από τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας για μόνιμη κατάσταση είναι:

$$D_i Re \left(\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \nabla \underline{v}_i \right) - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{v}_i = 0 \quad (2)$$

όπου $\underline{\underline{\sigma}}_i = -P_i \underline{I} + \underline{\underline{\tau}}_i + \underline{\underline{m}}_i$ συνολικός τανυστής των τάσεων, P_i η πίεση και $\underline{\underline{\tau}}_i$ ο επιπλέον τανυστής των τάσεων

$$\underline{\underline{\tau}}_{=1} = \tau_p + 2\beta M_1 \underline{\underline{\dot{\gamma}}}_{=1} \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{=2} = 2M_2 \underline{\underline{\dot{\gamma}}}_{=2} \quad (4)$$

Για το πολυμερικό υλικό ο επιπλέον τανυστής των τάσεων χωρίζεται σε ένα πολυμερικό τ_p και σε

ένα ιζώδες μέρος $2\beta M_1 \underline{\underline{\dot{\gamma}}}_{=1}$, όπου $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}_{=i} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v}_i + \nabla \underline{v}_i^T)$ ο ρυθμός παραμόρφωσης. Ο τανυστής τάσεων Maxwell, $\underline{\underline{m}}_i$, περιγράφει την αλληλεπίδραση του ρευστού i με το ηλεκτρικό πεδίο και ορίζεται ως εξής

$$\underline{\underline{m}}_i = \varepsilon_i \underline{E}_i \underline{E}_i - \frac{1}{2} \varepsilon_i \underline{E}_i \cdot \underline{E}_i \underline{I} \quad (5)$$

Οι τάσεις Maxwell εξαρτώνται από την τοπική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται από την επίλυση των εξισώσεων Maxwell

$$\nabla \cdot (\varepsilon_i \underline{E}_i) = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \underline{E}_i = 0 \quad (7)$$

Ορίζοντας ένα δυναμικό φ_i τέτοιο ώστε $\underline{E}_i = -\nabla \varphi_i$ οι εξισώσεις (6) και (7) μπορούν να συνδυαστούν στην παρακάτω εξίσωση για το δυναμικό

$$\nabla \cdot (\varepsilon_i \nabla \varphi_i) = 0. \quad (8)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί το πολυμερικό μέρος του τανυστή των τάσεων είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε κάποια καταστατική εξίσωση. Λόγω των καλών της ρεολογικών προβλέψεων και

της ευχρηστίας της, επιλέξαμε την παρακάτω καταστατική η οποία έχει προταθεί από τους Phan-Thien & Tanner (1977):

$$Y \left(\underline{\underline{\tau}}_p \right) \underline{\underline{\tau}}_p + Wi \underline{\underline{\tau}}_p - 2(1 - \beta) M_1 \dot{\underline{\underline{\gamma}}} = 0, \text{ όπου } Y \left(\underline{\underline{\tau}}_p \right) = \exp \left[\frac{a_{PTT} - Wi \underline{\underline{\tau}}_p}{1 - \beta} \right] \quad (9)$$

και $\underline{\underline{\tau}}_p$ το ίχνος του τανυστή $\underline{\underline{\tau}}_p$. Το σύμβολο \diamond πάνω από τον τανυστή των τάσεων $\underline{\underline{\tau}}_p$ δηλώνει την χρονοπαράγωγο Gordon-Schowalter που ορίζεται ως εξής:

$$\underline{\underline{\tau}}_p^\diamond = \frac{D \underline{\underline{\tau}}_p}{Dt} - \left(\underline{\underline{\nabla}}_s \underline{\underline{v}}_1 - \underline{\underline{\xi}}_s \dot{\underline{\underline{\gamma}}}_1 \right)^T \cdot \underline{\underline{\tau}}_p - \underline{\underline{\tau}}_p \cdot \left(\underline{\underline{\nabla}}_s \underline{\underline{v}}_1 - \underline{\underline{\xi}}_s \dot{\underline{\underline{\gamma}}}_1 \right) \quad (10)$$

όπου η παράμετρος $\underline{\underline{\xi}}_s$ δηλώνει την ολίσθηση μεταξύ του μοριακού δικτύου και του συνεχούς μέσου. Επιπλέον χρησιμοποιήθηκε η τεχνική EVSS-G η οποία συνίσταται στο χωρισμό του πολυμερικού μέρους των τάσεων σε ένα ελαστικό κι ένα ιξώδες μέρος

$$\underline{\underline{\tau}}_p = \underline{\underline{\Sigma}} + 2(1 - \beta) M_1 \dot{\underline{\underline{\gamma}}}_1 \quad (11)$$

Επιβάλλουμε συνθήκες μη ολίσθησης και μη διαπεροτότητας στα τοιχώματα των ηλεκτροδίων ενώ στα άκρα του πεδίου επιβάλλουμε περιοδικές συνθήκες. Κατά μήκος της διεπιφάνειας η ταχύτητα είναι συνεχής

$$\underline{\underline{v}}_1 = \underline{\underline{v}}_2 \quad (12)$$

και το πεδίο ροής θα πρέπει να ικανοποιεί ένα ισοζύγιο δυνάμεων μεταξύ του συνολικού τανυστή των τάσεων στο ρευστό και την επιφανειακή τάση

$$\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 + \frac{2H}{Ca} \underline{\underline{n}} \quad (13)$$

όπου $2H = -\underline{\underline{\nabla}}_s \cdot \underline{\underline{n}}$ και $\underline{\underline{\nabla}}_s = (I - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\nabla}}$. Στην εξίσωση (13), H είναι η μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας και $\underline{\underline{n}}$ το μοναδιαίο προς τα έξω στραμμένο διάνυσμα.

Σε ότι αφορά το ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζουμε τις παρακάτω συνθήκες:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (14)$$

$$\varepsilon_1 \nabla \varphi_1 = \varepsilon_2 \nabla \varphi_2. \quad (15)$$

2.1 Δημιουργία πλέγματος

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων επιλέξαμε τη μέθοδο των μικτών πεπερασμένων στοιχείων μαζί με ένα σύστημα οιονεί ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, ικανών να δημιουργήσουν ένα πλέγμα προσαρμοζόμενο στο χώρο που καταλαμβάνει το ρευστό. Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοστεί με επιτυχία στο παρελθόν για την προσομοίωση διάφορων προβλημάτων με ελεύθερες επιφάνειες (Tsiveriotis & Brown 1992, Christodoulou & Scriven 1992, Dimakopoulos & Tsamopoulos 2003). Το φυσικό πεδίο απεικονίζεται σε ένα υπολογιστικό με σταθερά σύνορα, με τον εξής μετασχηματισμό.

$$(x, y) \rightarrow (\eta, \xi) \quad (15)$$

Με αυτή την απεικόνιση, κάθε σημείο που έχει συντεταγμένες (r, z) , απεικονίζεται σε ένα σημείο στο υπολογιστικό πεδίο με συντεταγμένες (η, ξ) . Τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται μεταξύ τους μέσω του παρακάτω συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot (a \cdot \underline{\underline{\nabla}} \eta) = 0 \quad (16)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \left(\varepsilon_1 \sqrt{\frac{r_\xi^2 + z_\xi^2}{r_\eta^2 + z_\eta^2}} + (1 - \varepsilon_1) \right) \underline{\underline{\nabla}} \xi = 0 \quad (17)$$

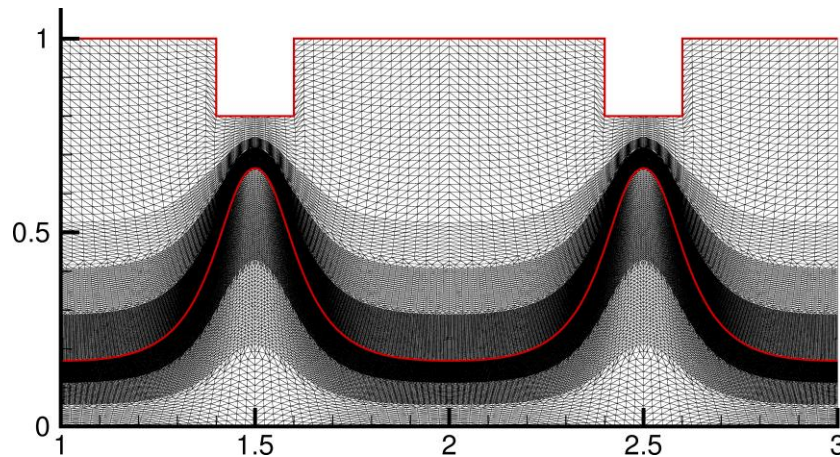
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \quad (18)$$

όπου οι δείκτες δείχνουν παράγωγο ως προς την μεταβλητή και ε_1 είναι μια εμπειρική παράμετρος μεταξύ 0 και 1, που για την περίπτωση μας λήφθηκε ίση με 0.1. Προκειμένου να επιλύσουμε το

παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρέπει να επιβληθούν και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Στα σταθερά σύνορα επιβάλλουμε τις θέσεις τους ενώ οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας χρησιμοποιούνται για την επιβολή κατάλληλων συνθηκών κατανομής των κόμβων κατά μήκος όλων των συνόρων⁶. Επιπλέον επάνω στην ελεύθερη επιφάνεια επιβάλλουμε την κινηματική εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v}_1 \cdot \nabla f = 0 \quad (19)$$

οπου η συνάρτηση f περιγράφει τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων επιλύεται με τροποποιημένη Newton-Raphson.

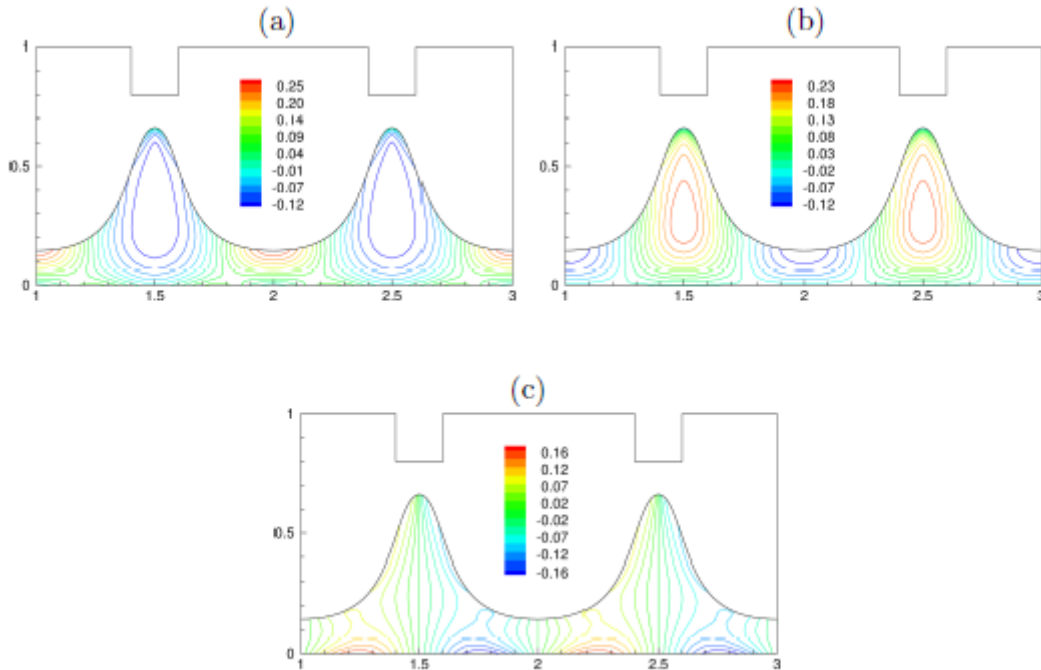


Σχήμα 2. Τυπικό πλέγμα με τρία επίπεδα πυκνώσης γύρω από τη διεπιφάνεια για $Wi=0$, $Ca=30$, $d=0.3$, $s=0.8$, $p=0.2$, $w=0.2$ at time $t = 26.04$. Για ευκρίνεια παρουσιάζεται μέρος του υπολογιστικού πεδίου, $1 < x < 3$.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

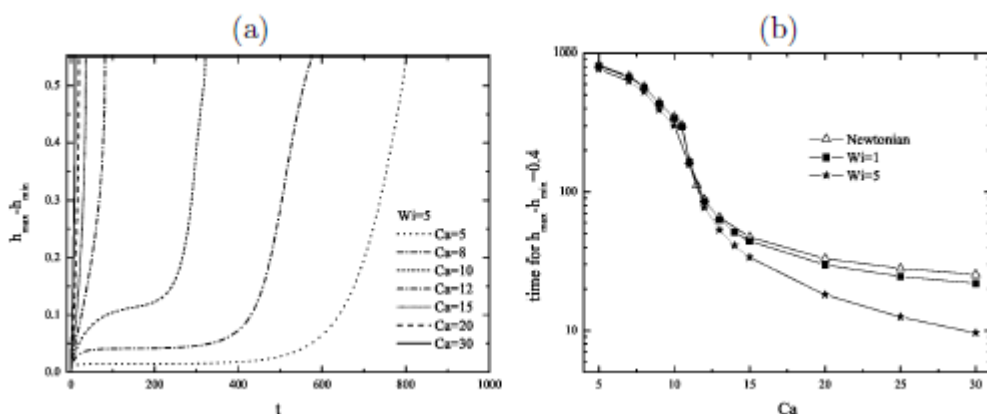
Όπως φαίνεται στο σχήμα 1 θεωρούμε ένα περιοδικά διαμορφωμένο ηλεκτρόδιο σαν μάσκα προκειμένου να προκαλέσουμε τη διαμόρφωση παρόμοιων διατάξεων και στη διεπιφάνεια του υμένα. Για το σκοπό της εργασίας αυτής θεωρούμε ότι το πλάτος και ύψος των προεξοχών είναι $w=0.2$ και $p=0.2$, αντίστοιχα. Επιπλέον θεωρήσαμε συνθήκες έρπουσας ροής ($Re=0.00001$) και λόγους πυκνότητας και ιξωδών τυπικούς για ένα σύστημα υγρού-αέρα, $D_2 = 0.001$, $M_2 = 0.001$.

Στο σχήμα 3 παρουσιάζουμε τις ισοδυναμικές γραμμές του πολυμερικού μέρους των τάσεων για χρόνο $t = 28.44$, $Ca = 20$, $Wi = 2$, $d = 0.3$ και $s = 0.8$ (για την ευκρίνεια του σχηματός παρουσιάζουμε μέρος του υπολογιστικού μας πεδίου, $1 \leq x \leq 3$). Ο υγρός υμένας αρχικά είναι επίπεδος και δεν υπάρχει ροή. Εφαρμόζοντας τάση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων το υγρό δέχεται ανομοιόμορφες ηλεκτρικές δυνάμεις, λόγω της παρουσίας των προεξοχών και του συνεπαγόμενου ετερογενούς ηλεκτρικού πεδίου και ο υγρός υμένας προσελκύεται από το πάνω ηλεκτρόδιο προς τις προεξοχές αποσταθεροποιώντας τη διεπιφάνεια. Το ύψος των διαταραχών του υμένα αυξάνεται διαρκώς μέχρι να ακουμπήσει το πάνω ηλεκτρόδιο. Οι προσωμοιώσεις σταματήθηκαν όταν ο υμένας έφτασε σε μικρή απόσταση από το ηλεκτρόδιο. Το ροϊκό πεδίο φαίνεται να είναι συμμετρικό γύρω από τις προεξοχές ακολουθώντας τη δομή του πάνω ηλεκτροδίου. Όπως φαίνεται στο σχήμα οι τάσεις $\tau_{p,xx}$ και $\tau_{p,yy}$ αναπτύσσουν ένα συνοριακό στρώμα στη κορυφή της προεξοχής του υμένα, για την σωστή ανάλυση του οποίου απαιτήθηκε τοπική πυκνώση του πλέγματος κοντά στη διεπιφάνεια υγρού-αέρα. Η xx πολυμερική τάση παίρνει αρνητικές τιμές κοντά στην κορυφή του υμένα και προκαλεί την συμπίεση στην x -κατεύθυνση της υπό δημιουργία κολώνας. Από την άλλη η εκτατική κάθετη τάση $\tau_{p,yy}$ παίρνει θετικές τιμές και φαίνεται να συνεισφέρει στην αποσταθεροποίηση της διεπιφάνειας. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι κάθετες τάσεις κυριαρχούν καθώς οι διαμητική τάση $\tau_{p,xy}$ είναι σχεδόν 2 φορές μικρότερη. Στη βιβλιογραφία μια συνήθης υπόθεση για την εξαγωγή απλοποιημένων εξισώσεων είναι η θεωρία της λίπανσης σύμφωνα με την οποία οι κάθετες τάσεις είναι αμελητέες.



Σχήμα 3. Ισοδυναμικές γραμμές των πολυμερικών τάσεων (a) $\tau_{p,xx}$, (b) $\tau_{p,yy}$ και (c) $\tau_{p,xy}$ για $t = 28.44$ και $Wi = 2$, $Ca = 20$, $\beta = 0$, $a_{PTT} = 0.05$, $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1$, $d = 0.3$, $s = 0.8$, $p = 0.2$, $w = 0.2$.

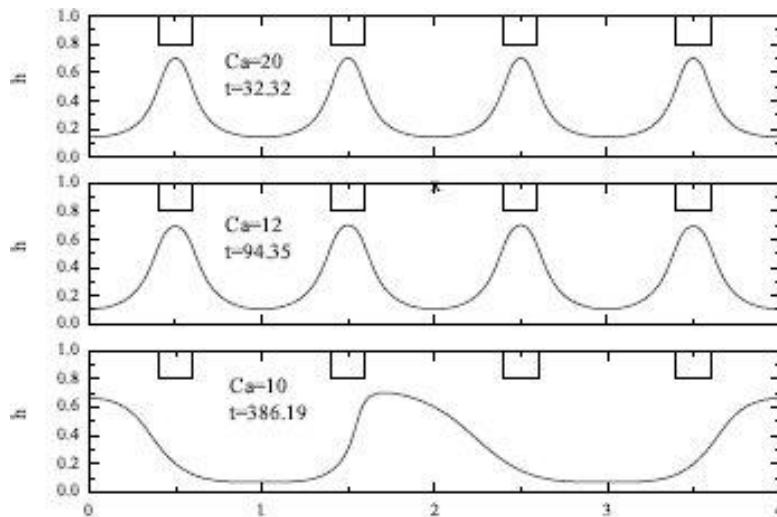
Στην περίπτωση μας είναι ξεκάθαρο πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Παρατηρούμε επίσης ότι η διατμητική τάση τείνει να κρατήσει ο υμένας το αρχικό του σχήμα επιδρώντας σταθεροποιητικά στη ροή. Πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τους Wu & Chou (2005) οι οποίοι χρησιμοποιούν τη θεωρία της λίπανσης στην περίπτωση επίπεδων ηλεκτροδίων, η τάση $\tau_{p,xy}$ είναι η μόνη που επιβιώνει και σύμφωνα με τη γραμική ανάλυση ευστάθειας που πραγματοποίησαν έχει αποσταθεροποιητικό χαρακτήρα. Από την ανάλυση των δικών μας αποτελεσμάτων προκύπτει ότι αυτό είναι πράγματι αλήθεια σε πολύ αρχικούς χρόνους, όπου η θεωρία της λίπανσης είναι και τυπικά σωστή, αλλά φαίνεται ότι η επίδραση της διατμητικής τάσης αλλάζει χαρακτήρα σε μεγαλύτερους χρόνους.



Σχήμα 4. (a) Χρονική εξέλιξη του πλάτους διαταραχών για διάφορους Ca και για $Wi = 5$. (b) Χρόνος που απαιτείται ώστε $h_{max} - h_{min} = 0.4$ συναρτήση του αριθμού Ca για διάφορους Wi . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του σχήματος 1.

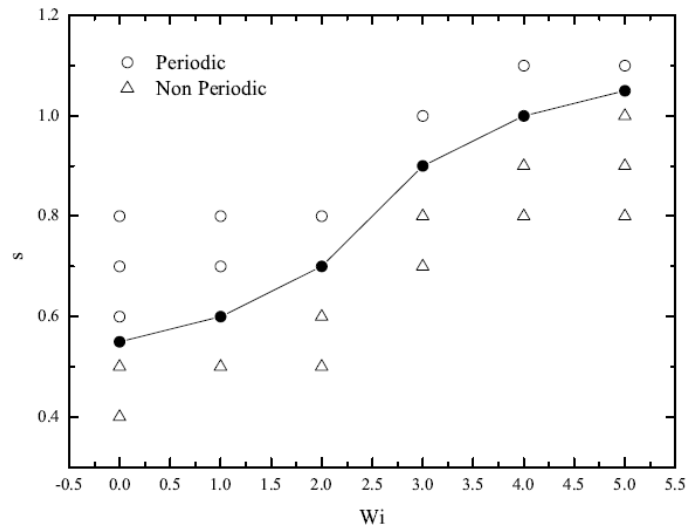
Πρόσφατα οι Heier et al. (2009) έδειξαν ότι με κατάλληλο χειρισμό της επίδρασης των τάσεων Maxwell και της διεπιφανειακής τάσης είναι δυνατό να επιτύχουμε μια μονιμη παραμόρφωση στη

διεπιφάνεια χωρίς να έρθει σε επαφή ο υμένας με το πάνω ηλεκτρόδιο. Για να διερευνήσουμε την δυνατότητα αυτή, εξετάσαμε στο σχήμα 4a την επίδραση του αριθμού Ca στη χρονική εξέλιξη του μέγιστου πλάτους των διαταραχών της διεπιφάνειας. Διαπιστώνουμε ότι για χαμηλές τιμές του Ca το πλάτος της διαταραχής αρχικά μεγαλώνει και κατόπιν επέρχεται κορεσμός, υποδεικνύοντας ότι οι ηλεκτρικές δυνάμεις έρχονται σε ισορροπία με τις διεπιφανειακές δυνάμεις. Το πλάτος ισορροπίας αυξάνεται με το Ca και η μέγιστη τιμή είναι της τάξης του 10% της απόστασης των ηλεκτροδίων. Ωστόσο παρατηρούμε ότι για πολύ μεγάλους χρόνους οι καταστάσεις αυτές ισορροπίας δεν είναι ευσταθείς και κάποιες κορυφές του υμένα φθάνουν τελικά στο πάνω ηλεκτρόδιο. Με την αύξηση του αριθμού Ca η επίδραση της επιφανειακής τάσης γίνεται λιγότερο σημαντική και η αποσταθεροποίηση της διεπιφάνειας συμβαίνει νωρίτερα. Στο σχήμα 4b σχεδιάσαμε το χρόνο που απαιτείται ώστε το μέγιστο πλάτος της διαταραχής, $h_{max} - h_{min} = 0.4$ προκειμένου να εκτιμήσουμε το όριακο Ca πέρα από τον οποίο η ψευδομόνιμη κατάσταση δεν είναι πλέον δυνατή. Βρέθηκε ότι για τις συγκεκριμένες παραμέτρους που μελέτησαμε ο οριακός $Ca \approx 10$. Παρατηρούμε ότι ο οριακός Ca που προκύπτει από τις μη γραμμικές προσομοιώσεις είναι αρκετά μικρότερος από αυτό που προβλέπει η γραμμική θεωρία σύμφωνα των Heier et al. (2009) σύμφωνα με την οποίαν $Ca_{cr} = 40.9$. Μια επιπλέον παρατήρηση ότι ο χρόνος τον οποίο περνά το σύστημα στην ψευδομόνιμη κατάσταση δεν επηρεάζεται από την ελαστικότητα του υμένα και αυτό αντανakλάται στη στο γεγονός ότι ο οριακός Ca παραμένει σταθερός με την αύξηση του Wi . Η επίδραση της ελαστικότητας ωστόσο γίνεται εμφανής για μεγαλύτερες τιμές του Ca όπου η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι λιγότερο έντονη.



Σχήμα 5. Ύψος διεπιφάνειας για διάφορους Ca και $Wi=1$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του σχήματος 1.

Στο σχήμα 4 παρουσιάζουμε το σχήμα της διεπιφάνειας σε μεγάλους χρόνους για τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού Ca . Βλέπουμε ότι για τιμές μεγαλύτερες της οριακής τιμής η παραμόρφωση της διεπιφάνειας παραμένει περιοδική ακολουθώντας πιστά τη γεωμετρία του πάνω ηλεκτροδίου. Απο την άλλη παρατηρούμε ότι με τη μείωση του Ca η περιοδικότητα καταστρέφεται με αύξηση του μήκους κύματος της διαταραχής. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι κάποιες κολόνες μεγαλώνουν σε βάρος των γειτόνων τους και αυτό είναι στην ουσία ένα φαινόμενο ωρίμανσης κατά Ostwald (Ostwald ripening).



Σχήμα 6. Χάρτης ροής για $Ca = 20$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του σχήματος 1.

Προκειμένου να είμαστε σε θέση να παράγουμε μικροδομές ή νανοδομές σε μεγάλες αποστάσεις με μεγάλη ακρίβεια είναι σημαντικό να γνωρίζουμε κάτω από ποιές συνθήκες είναι δυνατό να πάρουμε δομές που είναι περιοδικές. Στο σχήμα 6 παρουσιάζουμε ένα χάρτη από υπολογισμούς που πραγματοποιήσαμε για τον προσδιορισμό των κατασκευαστικών ορίων της διεργασίας αυτής καθώς και την επίδραση της ελαστικότητας του πολυμερικού υλικού σε αυτά. Κάθε σημείο στο διάγραμμα αυτό αντιστοιχεί σε μια προσομοίωση για τη δεδομένη τιμή της απόστασης μεταξύ των προεξοχών του πάνω ηλεκτροδίου και του αντίστοιχου αριθμού Wi . Οι ανοιχτοί κύκλοι δηλώνουν περιπτώσεις όπου η λύση χαρακτηρίζεται ως περιοδική και οι δομές του υμένα ακολουθούν πιστά τη δομή του ηλεκτροδίου, ενώ τα τρίγωνα δηλώνουν περιπτώσεις όπου οι λύσεις παύουν να είναι περιοδικές. Οι γεμάτοι κύκλοι δηλώνουν το οριακό σημείο. Το κριτήριο που χρησιμοποιήσαμε για τη διακρίση μεταξύ των δύο καταστάσεων είναι το εξής: όταν η απόκλιση κάθε κορυφής από την μέση τιμή είναι μικρότερη από 0.001 η δομή θεωρείται περιοδική ενώ όταν η απόκλιση είναι μεγαλύτερη θεωρούνται μη περιοδικές. Από το σχήμα είναι εμφανές ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των προεξοχών, s , αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Wi . Η ελάχιστη απόσταση, s , είναι ουσιαστικά το κατασκευαστικό όριο της διεργασίας αυτής και όπως φαίνεται όσο πιο ελαστικό είναι το υλικό του υμένα τόσο το κατασκευαστικό αυτό όριο μεγαλώνει, ωστόσο για μεγάλες τιμές του αριθμού Wi επέρχεται κορεσμός.

4. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι συγγραφείς θα ήθελαν να ευχαριστήσουν την οικονομική υποστήριξη του προγράμματος στο πλαίσιο της Δράσης «Ενίσχυση Μεταδιδακτόρων Ερευνητών/τριών» (EIFVM, αριθμός προγράμματος PE8/906), με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bandyopadhyay D., Sankar P. D., Reddy, Sharma A., Electric field and van der waals force induced instabilities in thin viscoelastic bilayers, *Physics of Fluids* 24 (7) (2012) 074106–074106–29.
- Christodoulou K., Scriven L., Discretization of free surface flows and other moving boundary problems, *Journal of Computational Physics* 99 (1) (1992) 39–55.
- Craster R. V., O. K. Matar, Electrically induced pattern formation in thin leaky dielectric films, *Phys. Fluids* 17 (2005) 032104.
- Dimakopoulos Y., Tsamopoulos J., A quasi-elliptic transformation for moving boundary problems with large anisotropic deformations, *Journal of Computational Physics* 192 (2) (2003) 494522.

- Espin L., Corbett A., Kumar S., Electrohydrodynamic instabilities in thin viscoelastic films AC and DC fields, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 196 (2013) 102–111.
- Heier J., Groenewold J., Steiner U., Pattern formation in thin polymer films by spatially modulated electric fields, *Soft Matter* 5 (2009) 3997.
- Lin Z., Kerle T., Baker S. M., Hoagland D. A., Schäffer E., Steiner U., Russell T. P., Electric field induced instabilities at liquid/liquid interfaces, *The Journal of Chemical Physics* 114 (5) (2001) 2377.
- Lin Z., Kerle T., Russell T. P., Schäffer E., Steiner U., Structure formation at the interface of Liquid/Liquid bilayer in electric field, *Macromolecules* 35 (10) (2002) 3971–3976.
- Pease L. F., Russel W. B., Linear stability analysis of thin leaky dielectric films subjected to electric fields, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 102 (2) (2002) 233–250.
- Pease L. F., Russel W. B., Electrostatically induced submicron patterning of thin perfect and leaky dielectric films: A generalized linear stability analysis, *The Journal of Chemical Physics* 118 (8) (2003) 3790–3803.
- Pease L. F., Russel W. B., Limitations on length scales for electrostatically induced submicrometer pillars and holes, *Langmuir* 20 (3) (2004) 795–804.
- Phan-Thien N., Tanner R. I., A new constitutive equation derived from network theory, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2 (1977) 353.
- Roberts S. A., Kumar S., AC electrohydrodynamic instabilities in thin liquid films, *Journal of Fluid Mechanics* 631 (2009) 255.
- Schäffer E., Thurn-Albrecht T., Russell T. P., Steiner U., Electrically induced structure formation and pattern transfer, *Nature* 403 (2000) 874.
- Schäffer E., Thurn-Albrecht T., Russell T. P., Steiner U., Electrohydrodynamic instabilities in polymer films, *Europhysics Letters (EPL)* 53 (4) (2001) 518–524.
- Shankar V., Sharma A., Instability of the interface between thin fluid films subjected to electric fields, *J. Colloid Interface Sci.* 274 (2004) 294–308.
- Tomar G., Shankar V., Sharma A., Biswas G., Electrohydrodynamic instability of a confined viscoelastic liquid film, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 143 (2-3) (2007) 120–130.
- Tsiveriotis K., Brown R. A., Boundary-conforming mapping applied to computations of highly deformed solidification interfaces, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 14 (8) (1992) 9811003.
- Wu L., Chou S., Electrohydrodynamic instability of a thin film of viscoelastic polymer underneath a lithographically manufactured mask, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 125 (2-3) (2005) 91–99.
- Wu N., Pease L. F., Russel W. B., Electric-field-induced patterns in thin polymer films: weakly nonlinear and fully nonlinear evolution, *Langmuir* 21 (26) (2005) 12290–12302.

ABSTRACT

We investigate the non-linear dynamics of the electrohydrodynamic instability of a viscoelastic polymeric film under a patterned mask. We develop a computational model and carry out 2D numerical simulations fully accounting for the flow and electric field in both phases. We perform a thorough parametric study and investigate the influence of the various rheological parameters, the applied voltage and the period of the protrusions of the mask in order to define the fabrication limits of this process in the case of patterned electrodes. Our results indicate that the effect of elasticity is destabilizing, in agreement with earlier studies in the literature based on linear stability analysis for homogeneous electric fields. We also find that for low values of the Ca number a metastable state arises with finite interfacial deformation the amplitude of which compares favourably with experimental observations in contrast with earlier predictions using linear theory. The critical voltage for this metastable state appears to be unaffected by the elasticity of the material. On the other hand, it is shown that viscoelasticity affects the fabrication limit on the period of the protrusions of the top electrode.