

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΕΝΟΣ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Δ. Πέττας, Γ. Τσαμόπουλος

Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών 26054, Πάτρα

Γ. Καραπέτσας

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας 38334, Βόλος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κατά την εκβολή ιξωδοελαστικών ρευστών μπορούν να συμβούν ποικίλες αστάθειες που επιδεινώνουν την ποιότητα του τελικού προϊόντος. Συνήθως, πρώτη κάνει την εμφάνιση της η αστάθεια τύπου «δέρματος καρχαρία» η οποία οδηγεί σε μικρές διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας. Προκειμένου να ερευνησουμε αυτή την μορφή αστάθειας εκτελούμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας υπό συνθήκες έρπουσας ροής γύρω από τη μόνιμη κατάσταση της εκβολής ιξωδοελαστικού ρευστού μεταξύ παράλληλων πλακών, χρησιμοποιώντας το μοντέλο PTT (Phan-Thien-Tanner) για τον υπολογισμό των πολυμερικών τάσεων. Παρατηρήθηκε ότι η ροή εμφανίζει μια διακλάδωση Hopf καθώς ο αριθμός Weissenberg (Wi) γίνεται μεγαλύτερος από μια κρίσιμη τιμή, η οποία αναγκάζει τη ροή να γίνει περιοδική στον χρόνο. Το ιδιοδιάνυσμα της κυρίαρχης ιδιοτιμής υποδεικνύει ότι η αστάθεια προκαλείται από το ιδιάζον σημείο του προβλήματος (δηλ. στην έξοδο του εκβολέα) και εκτείνεται 2-5 ακτίνες μακριά από αυτό, ανάλογα με το λόγο των τριχοειδών προς τις ιξώδεις δυνάμεις, αριθμός Ca , ενώ αφήνει το υπόλοιπο ρευστό σχεδόν αδιατάρακτο. Τέλος, μελετήσαμε παραμετρικά την αστάθεια ως προς την παράμετρο ϵ του μοντέλου PTT, για τον υπολογισμό του κρίσιμου αριθμού Wi για διάφορες τιμές του Ca .

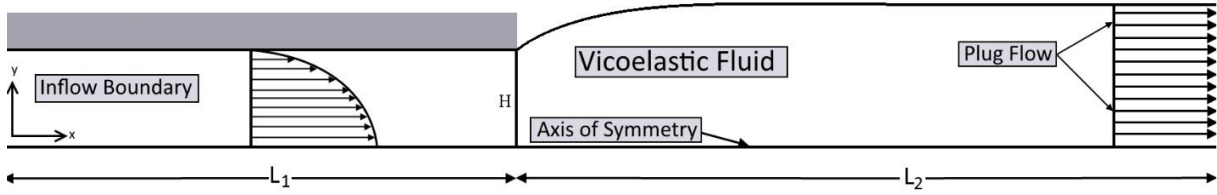
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά την κατεργασία πολυμερών πολλές φορές, σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας, εμπλέκεται η εκβολή του ρευστού από διατομές ποικίλων σχημάτων. Κατά την διεργασία αυτή το ρευστό διογκώνεται στην έξοδο του αγωγού και, επιπλέον, πάνω από μια κρίσιμη τιμή της διαμητικής τάσης (γύρω στο 0.1 – 0.3 MPa) είναι δυνατόν να εμφανιστούν ποικίλες αστάθειες οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά την ποιότητα του τελικού προϊόντος. Οι αστάθειες αυτές παραμένουν ένα σημαντικό πρόβλημα για τη βιομηχανία και τα τελευταία 40 χρόνια έχουν μελετηθεί από διάφορους ερευνητές [1-4], ωστόσο η κατανόηση των μηχανισμών που οδηγούν σε αστάθεια είναι μέχρι σήμερα ελλιπής. Πολύ πρόσφατα οι Karapetsas & Tsamopoulos [5] παρουσίασαν μια θεωρητική μελέτη στην οποία πραγματοποίησαν γραμμική ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος «stick-slip» (δηλαδή εκβολή στο όριο που το ρευστό έχει πάρα πολύ μεγάλη επιφανειακή τάση) και έδειξαν ότι η ροή γίνεται ασταθής μετά από μια κρίσιμη τιμή του αριθμού Weissenberg. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε το πλήρες πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της πεπερασμένης επιφανειακής τάσης που επιτρέπει την παραμόρφωση της διεπιφάνειας υγρού/αέρα.

ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε την μόνιμη δισδιάστατη ροή εκβολής ενός ιξωδοελαστικού ρευστού στο οποίο η κινούσα δύναμη είναι η διαφορά πίεσης. Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο με σταθερή πυκνότητα, ρ , και επιφανειακή τάση, σ , χρόνο χαλάρωσης, λ και ολικό ιξώδες μηδενικής διάτμησης, $\mu = \mu_s + \mu_p$, όπου μ_s και μ_p είναι τα αντίστοιχα ιξώδη του διαλύτη και του πολυμερούς. Στο Σχήμα 1 φαίνεται το ήμισυ του χωρίου (μέχρι το επίπεδο συμμετρίας) που καταλαμβάνει το ρευστό σε μόνιμη κατάσταση. Το ιξωδοελαστικό ρευστό, αρχικά, ρέει μέσα στον επίπεδο αγωγό διατομής $2H$ και μήκους L_1 . Το πεδίο της ταχύτητας καθώς και το πεδίο της πίεσης αναδιατάσσεται καθώς το ρευστό εξέρχεται από τον αγωγό μέχρι που σε απόσταση L_2 από την έξοδο αποκαθίσταται εμβολική ροή.

Αδιαστατοποιούμε όλα τα μήκη με το μισό του ύψους του αγωγού (H), την ταχύτητα με την μέση ταχύτητα στην είσοδο του αγωγού, V , ενώ η πίεση και οι τάσεις αδιαστοποιούνται με τον ιξώδη τρόπο, $\mu V/H$. Οπότε οι αδιάστατοι αριθμοί που προκύπτουν είναι ο αριθμός Reynolds, τον οποίο στα πλαίσια της έρπουσας ροής τον θεωρούμε μηδέν, ο αριθμός Weissenberg, $Wi = \lambda V/H$, ο αριθμός τριχοειδών δυνάμεων, $Ca = \mu V/\sigma$, ο λόγος του Νευτονικού διαλύτη ως προς το συνολικό ιξώδες μηδενικής διάτμησης, $\beta = \mu_s/\mu$ και οι γεωμετρικοί λόγοι αποστάσεων, $l_1 = L_1/H$ και $l_2 = L_2/H$.



Σχήμα 1 Σχηματική απεικόνιση της ροής εκβολής από επίπεδο αγωγό. Στο σχήμα παρατηρούμε το σύστημα συντεταγμένων και τα διαστατικά μεγέθη του προβλήματος καθώς και την επιβολή συνοριακών συνθηκών στην είσοδο και στην έξοδο του χωρίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η ροή διέπεται από την αρχή διατήρησης της ορμής και της μάζας, οι οποίες με την παραδοχή της έρπουσας ροής, παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\underline{\nabla} P - \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0 \quad (1)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (2)$$

όπου \underline{v} και P συμβολίζουμε το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και το βαθμωτό πεδίο πίεσης, αντίστοιχα, και $\underline{\underline{\tau}}$ είναι ο τανυστής των τάσεων, τον οποίο διαχωρίζουμε σε έναν τανυστή με αμιγώς ιξώδη συμπεριφορά $2\beta\dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ και έναν με ιξωδοελαστική συμπεριφορά $\underline{\underline{\tau}}_p$,

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\beta\dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \underline{\underline{\tau}}_p \quad (3)$$

όπου $\dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ είναι ο τανυστής ρυθμού διάτμησης που ορίζεται ως $\dot{\underline{\underline{\gamma}}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{v} + \underline{\nabla}\underline{v}^T)$.

Για να λάβουμε υπόψη την ιξωδοελαστικότητα του υλικού μας χρησιμοποιούμε το μοντέλο Phan-Thien & Tanner (PTT) στην εκθετική του μορφή, Phan-Thien [6],

$$\exp\left(\frac{\varepsilon}{1-\beta} \text{Wi} \text{trace}(\underline{\underline{\tau}}_p)\right) \underline{\underline{\tau}}_p + \text{Wi} \underline{\underline{\tau}}_p^\nabla - 2(1-\beta)\dot{\underline{\underline{\gamma}}} = 0 \quad (4)$$

όπου το « ∇ » υπεράνω του τανυστή υποδηλώνει την άνω συναγόμενη Maxwell παράγωγο η οποία είναι:

$$\underline{\underline{\tau}}^\nabla = \frac{D\underline{\underline{\tau}}}{Dt} - [\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\nabla}\underline{v}]^T - \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\nabla}\underline{v} \quad (5)$$

όπου $\underline{\underline{x}}$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε δεύτερης τάξης τανυστής. Στο μοντέλο PTT οι ιδιότητες του ιξωδοελαστικού ρευστού καθορίζονται από την παράμετρο ε του μοντέλου. Αυτή η παράμετρος θέτει ένα άνω όριο στο εκτατικό ιξώδες, το οποίο αυξάνεται καθώς η παράμετρος μειώνεται, ενώ επηρεάζει και το διατμητικό ιξώδες και την ιξωδοελαστικότητα του υλικού.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού $l_1 \leq x \leq l_1+l_2$, τα πεδία ταχύτητας και πίεσης ακολουθούν ένα τοπικό ισοζύγιο δυνάμεων μεταξύ των τριχοειδών δυνάμεων, των τάσεων και της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η πίεση του περιβάλλοντος ρευστού είναι ίση με μηδέν στην διεπιφάνεια (πίεση αναφοράς).

$$\underline{n} \cdot (-P\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}) = \frac{2H_c}{Ca} \underline{n} \quad (6)$$

όπου \underline{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ελεύθερη επιφάνεια και H_c είναι η μέση καμπυλότητά της, η οποία ορίζεται ως:

$$2H_c = -\underline{\nabla}_s \cdot \underline{n}, \quad \underline{\nabla}_s = (\underline{\underline{I}} - \underline{nn}) \cdot \underline{\nabla} \quad (7)$$

Επίσης, κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας επιβάλλουμε τη συνοριακή συνθήκη μη διείσδυσης, δηλαδή η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να είναι ίση με το μηδέν:

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0 \quad (8)$$

Κατά μήκος του τοιχώματος ($y=1, 0 \leq x \leq l_1$), επιβάλλουμε τις συνήθεις συνοριακές συνθήκες μη-ολίσθησης και μη διείσδυσης. Στο επίπεδο συμμετρίας $y = 0, 0 \leq x \leq l_1+l_2$ επιβάλλουμε τη συνθήκη συμμετρίας $\partial v_x / \partial y = 0$. Τέλος, συνοριακές συνθήκες πρέπει να οριστούν στην είσοδο και στην έξοδο της περιοχής επίλυσης της ροής. Στην έξοδο της ροής επιβάλλουμε ομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας $\partial v_x / \partial x = 0$ σε συνδυασμό με την χρήση των Open Boundary Conditions (OBC), Papanastasiou, & Malamataris, & Ellwood [7]. Ενώ για $x = 0$ και $0 \leq y \leq 1$ εκτός από το ισοζύγιο της ορμής σε πλήρως ανεπτυγμένη μορφή εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες και για το πολυμερικό τμήμα των τάσεων. Ακολουθούμε προσέγγιση αντίστοιχη με εκείνη των Karapetsas & Tsamopoulos [8], οι οποίοι θεωρήσαν ότι στην είσοδο του αγωγού υπάρχει πλήρως ανεπτυγμένη ροή την οποία υπολόγισαν επιλύοντας τις εξισώσεις στην απλοποιημένη τους μορφή σε μια διάσταση.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Για την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα χρησιμοποιούμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων μεικτού τύπου σε τριγωνικά στοιχεία. Με αυτή την μέθοδο προσεγγίζουμε την ταχύτητα και τη θέση των κόμβων με συναρτήσεις Langrange 6 κόμβων, ενώ για την πίεση και όλες τις τάσεις με συναρτήσεις βάσης 3 κόμβων. Έπειτα, εφαρμόζουμε την μέθοδο Galerkin και κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης λαμβάνουμε την ασθενή μορφή των εξισώσεων διατήρησης ορμής και μάζας. Τέλος, λόγω του υπερβολικού χαρακτήρα του μοντέλου των πολυμερικών τάσεων είναι αναγκαία η χρήση της μεθόδου SUPG, η οποία προτάθηκε από τους Brooks & Hughes [9]. Τέλος, για τον ακριβέστερο υπολογισμό των διάφορων παραμορφώσεων, οι οποίες προκαλούνται από την συνοριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (6) χρησιμοποιούμε την ελλειπτική γεννήτρια πλέγματος όπως τροποποιήθηκε από τους Dimakopoulos & Tsamopoulos [10].

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη ροή εκβολής ιξωδοελαστικού ρευστού στη μόνιμη κατάσταση. Με σκοπό την διερεύνηση της ευστάθειας της ροής εφαρμόζουμε την γραμμική ανάλυση ευστάθειας, θεωρώντας απειροελάχιστες διαστάσεις διαταραχές γύρω από την μόνιμη κατάσταση της ροής:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}(\eta, \xi, t) \\ P(\eta, \xi, t) \\ \underline{G}(\eta, \xi, t) \\ \underline{\Sigma}(\eta, \xi, t) \\ \underline{x}(\eta, \xi, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_b(\eta, \xi) \\ P_b(\eta, \xi) \\ \underline{G}_b(\eta, \xi) \\ \underline{\Sigma}_b(\eta, \xi) \\ \underline{x}_b(\eta, \xi) \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \underline{v}'(\eta, \xi) \\ P'(\eta, \xi) \\ \underline{G}'(\eta, \xi) \\ \underline{\Sigma}'(\eta, \xi) \\ \underline{x}'(\eta, \xi) \end{bmatrix} e^{-\lambda t}, \delta \ll 0 \quad (9)$$

όπου $\underline{x} = [y(\eta, \xi, t), z(\eta, \xi, t)]$, $\underline{x}_b = [y_b(\eta, \xi, t), z_b(\eta, \xi, t)]$ and $\underline{x}' = [y'(\eta, \xi, t), z'(\eta, \xi, t)]$ και λ είναι ο όρος εκθετικής απόσβεσης/ενίσχυσης της διαταραχής. Οι πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της σχέσης (9) είναι η λύση στην μόνιμη κατάσταση, οι δευτεροί όροι είναι η διαταραχή στο σύστημα των εξισώσεων, ενώ παράλληλα υποθέτουμε ότι η γραμμική διαταραχή έχει εκθετική εξάρτηση από τον χρόνο.

Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (1-8) και παραλείποντας όρους ανώτερους της δεύτερης τάξης προκύπτει το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο είναι της μορφής:

$$\underline{J}\underline{w} = \lambda \underline{M}\underline{w} \quad (10)$$

όπου \underline{J} και \underline{M} είναι ο Ιακωβιανός πίνακας και ο πίνακας «μάζας», αντίστοιχα, ενώ λ είναι οι ιδιοτιμές και \underline{w} είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τέλος, για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιούμε την μέθοδο Arnoldi.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Γνωρίζουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα του προβλήματος «stick-slip» για επίπεδο αγωγό και ιξωδοελαστικές ροές με την χρήση του μοντέλου Phan-Thien-Tanner, [4], ότι δηλαδή, στο όριο που οι τριχοειδείς δυνάμεις τείνουν στο άπειρο, η ροή εκβολής μπορεί να έχει μια ασταθή ιδιοτιμή και ο κρίσιμος αριθμός Weissenberg εντοπίζεται περίπου στο $Wi=2.5$. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσουμε εάν η ιδιοτιμή αυτή υπάρχει και σε

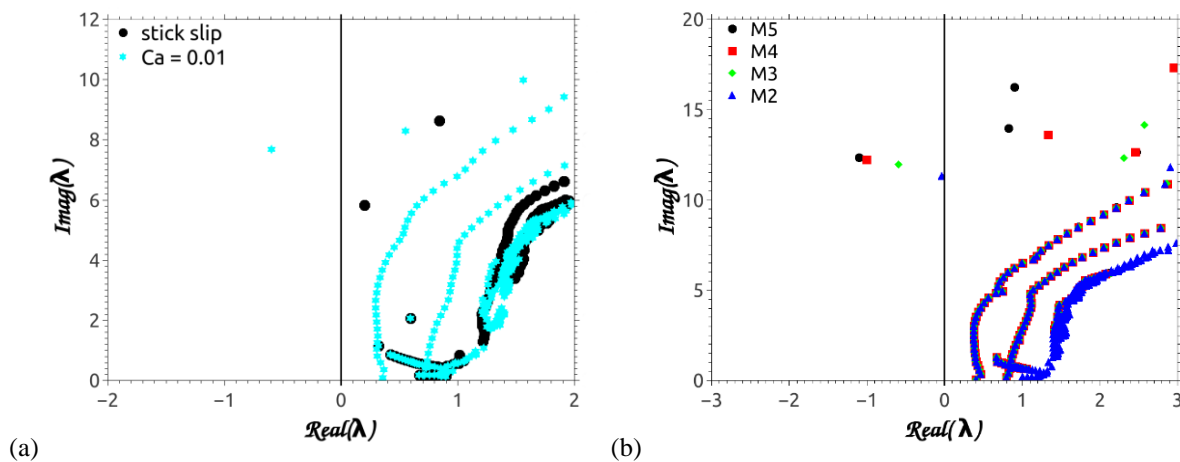
πεπερασμένες τιμές του Ca . Στο σχήμα 2(a) παρατηρούμε την σύγκριση του φάσματος της ροής «stick-slip» ($Ca=0$) με εκείνο της εκβολής για μικρό αριθμό τριχοειδών δυνάμεων, $Ca=0.01$, ενώ ο αριθμός Wi είναι ίσος με 2.0. Τα δύο φάσματα βρίσκονται σε καλή συμφωνία μεταξύ τους, ενώ η εκβολή με πεπερασμένο Ca εμφανίζει ένα επιπλέον συνεχές κλάδο στο φάσμα της, για τον οποίο πιστεύουμε ότι προέρχεται από την διαταραχή της ελεύθερης επιφάνειας. Παρόλα αυτά, η ροή εκβολής εμφανίζει μια ιδιοτιμή η οποία γίνεται ασταθής σε μικρότερο αριθμό Wi από το την ροή stick-slip.

Συνήθως κατά διαδικασία της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας δημιουργούνται μαζί με τις ιδιοτιμές της ροής κάποιες πλασματικές ιδιοτιμές, οι οποίες μπορεί να προέρχονται είτε από την ίδια την μέθοδο Arnoldi, λόγω π.χ. έλλειψης πλήρους ορθογωνιότητας μεταξύ των διανυσμάτων βάσης, είτε λόγω της διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων, τα οποία προσεγγίζουν ένα συνεχές φυσικό πρόβλημα με διακριτά μαθηματικά. Για αυτό τον λόγο, είναι επιτακτική ανάγκη να διασφαλίσουμε ότι η ιδιοτιμή που παρατηρούμε να είναι ασταθής για $Ca=0.01$ προέρχεται από το φυσικό πρόβλημα. Για την πιστοποίηση του φάσματος ιδιοτιμών όπως έδειξαν οι Karapetsas & Tsamopoulos [5] είναι σημαντικό να διαπιστωθεί ότι οι ιδιοτιμές που μας ενδιαφέρουν συγκλίνουν με πύκνωση του πλέγματος. Τα πλέγματα καθώς και οι ιδιότητές τους (αριθμός στοιχείων σε κάθε κατεύθυνση, συνολικών αγνώστων, ελάχιστο μέγεθος στοιχείων κτλ.) που χρησιμοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας I). Ο αριθμός δίπλα στο γράμμα M υποδηλώνει τον αριθμό των επιπέδων τοπικής πύκνωσης που προσθέτουμε γύρω από αυτό το ιδιάζον σημείο που παρουσιάζεται στην έξοδο από τον αγωγό.

Πίνακας I. Χαρακτηριστικά των πλεγμάτων κατηγορίας M.

Mesh	No. of 1D elements in the (x,z) direction	No. of refinement levels	No. of triangular elements	No. of unknowns	l_1	l_2	Δx_{min}	$\Delta x_{min}/\Delta y_{min}$
M0	(40,250)	0	20000	265234	10	25	7.4×10^{-3}	0.99
M1	(40,250)	1	21240	310100	10	25	3.8×10^{-3}	0.98
M2	(40,250)	2	22803	373762	10	25	1.8×10^{-3}	1.00
M3	(40,250)	3	31431	414818	10	25	9.4×10^{-4}	1.03
M4	(40,250)	4	32439	428084	10	25	4.7×10^{-4}	1.03
M5	(40,250)	5	33047	431526	10	25	1.7×10^{-4}	1.03

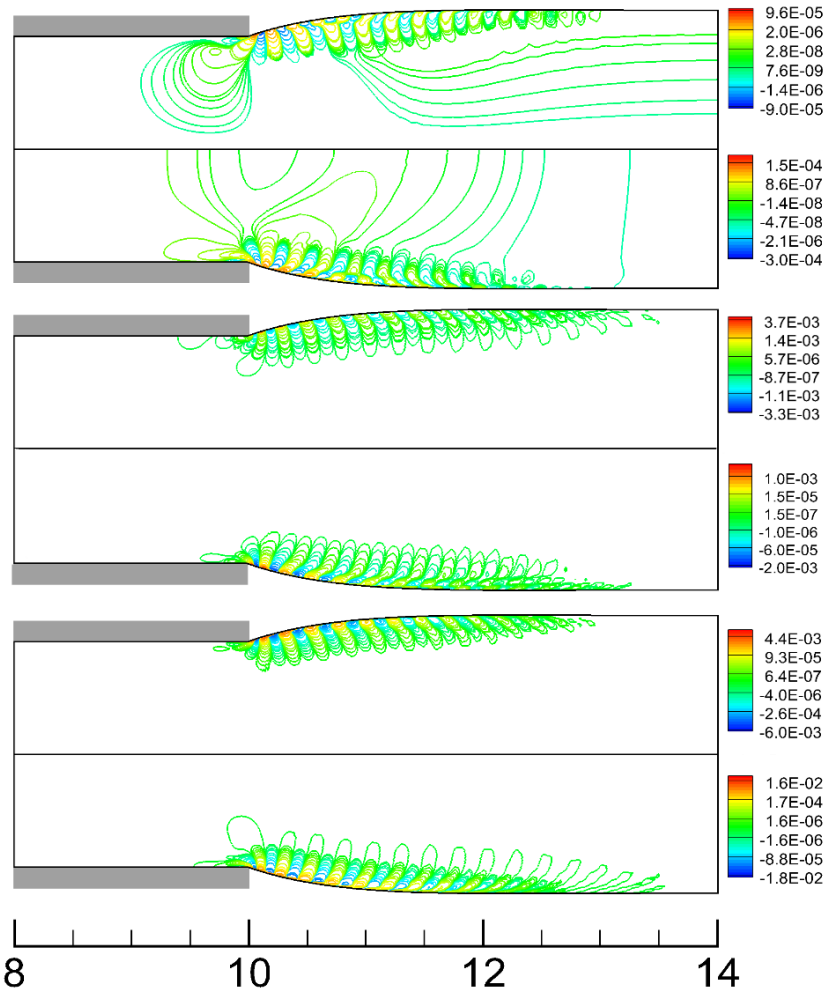
Στο Σχήμα 2(b) παρουσιάζουμε το φάσμα ιδιοτιμών για 4 διαφορετικά πλέγματα και παρατηρούμε ότι η πιο επικίνδυνη ιδιοτιμή (η ιδιοτιμή με το μικρότερο πραγματικό μέρος) συγκλίνει αυξάνοντας την διακριτοποίηση γύρω από το ιδιάζον σημείο. Παρακάτω, η ανάλυση θα συνεχιστεί χρησιμοποιώντας το πλέγμα M3.



Σχήμα 2 (a) Σύγκριση του φάσματος της ροής «stick-slip» με τη ροή εκβολής για $Wi=2$, $\epsilon=0.05$, $\beta=0$, χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα M3. (b) έλεγχος σύγκλισης της ιδιοτιμής με το πλέγμα για $Wi=2$, $Ca=0.01$, $\epsilon=0.1$, $\beta=0$

Το γεγονός ότι η ιδιοτιμή, την στιγμή που έχουμε κρίσιμες συνθήκες είναι φανταστική, σηματοδοτεί την έναρξη μιας τοπικής διακλάδωσης Hopf κατά την οποία η λύση μετατρέπεται σε περιοδική στον χρόνο. Αυτό παρατηρείται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3) που όπου το ροϊκό πεδίο καθώς και το πεδίο πίεσης που αντιστοιχεί στο κρίσιμο ιδιοδιάνυσμα είναι περιοδικά στην αξονική κατεύθυνση, ενώ διαφαίνεται ότι η διαταραχή ξεκινά από

το ιδιάζον σημείο στο τέλος του αγωγού και περιορίζεται σε μια κλειστή περιοχή γύρω από την ελεύθερη επιφάνεια ρευστού-αέρα.



Σχήμα 3 Τιμές των μεταβλητών του κρίσιμου ιδιοδιανύσματος κατά την εκβολή από επίπεδο αγωγό.

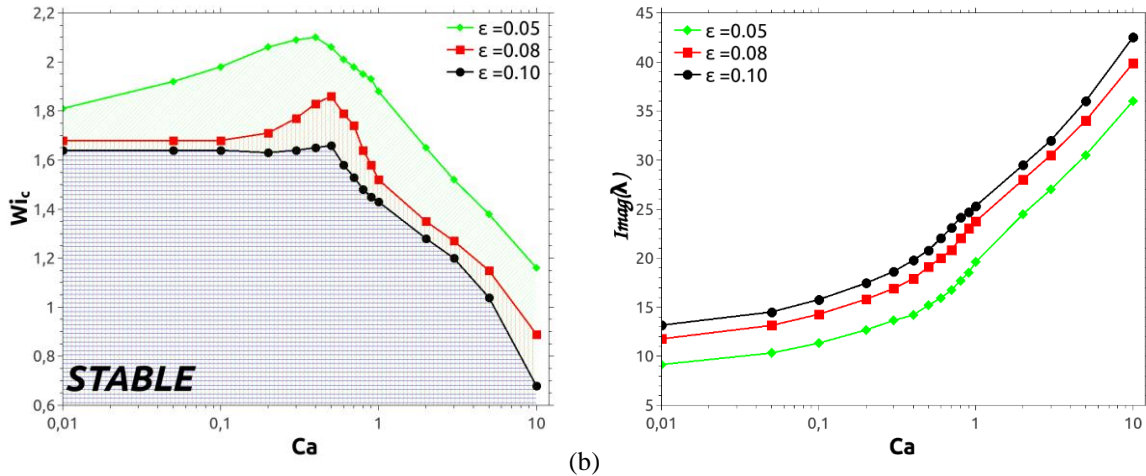
Παρατηρούμε τις ισοϋψείς καμπύλες (α) v'_y, v'_x (β) P', τ'_{yy} (γ) τ'_{yx}, τ'_{xx} στο πάνω και στο κάτω μέρος του σχήματος αντίστοιχα, $Wi=1.5, Ca=1.0, \epsilon=0.1, \beta=0$ (για σαφήνεια παρουσιάζουμε την περιοχή $8 \leq x \leq 14$). Η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι: $\lambda=-0.982+i18.522$. Χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα M3.

Η παραμετρική μελέτη για την εύρεση του κρίσιμου αριθμού Wi_c για διάφορους αριθμούς τριχοειδών δυνάμεων και διάφορες τιμές της ρεολογικής παραμέτρου, ϵ , παρουσιάζεται στο (Σχήμα 4). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για μικρές τιμές του αριθμού Ca ($Ca < 0.5$) το φυσικό πρόβλημα παρουσιάζει τάση σταθεροποίησης, το οποίο οφείλεται στο σταθεροποιητικό χαρακτήρα που εμφανίζει η απότομη διόγκωση του πολυμερικού τήγματος στην έξοδο του αγωγού σε μικρές τιμές $Ca < 0.5$. Ενώ για τιμές μεγαλύτερες από $Ca > 0.5$, όπου η διόγκωση του πολυμερούς προσεγγίζει μια άνω ασύμπτωτη, η κρίσιμη τιμή του αριθμού Wi μειώνεται, αφού η μείωση της επιφανειακής τάσης του πολυμερούς κάνει την επιφάνεια πιο ευάλωτη σε ταλαντώσεις μικρού μήκους κύματος. Παράλληλα, η συχνότητα της αστάθειας αυξάνεται με τον αριθμό Ca , θυμίζοντας την αστάθεια “shark-skin”.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έγινε προσομοίωση της διεργασίας εκβολής ενός ιξωδοελαστικού ρευστού με πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την ελλειπτική μέθοδο κατασκευής του πλέγματος προκειμένου να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Για την μοντελοποίηση της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του ρευστού χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Phan-Thien & Tanner και επιλύθηκε σε συνδυασμό με την τεχνική EVSS-G, σε συνδυασμό με τη μέθοδο SUPG. Έγινε ανάλυση ευστάθειας της ροής εκβολής από επίπεδο αγωγό με την μέθοδο Arnoldi και παρατηρήθηκε ότι η ιδιοτιμή η οποία κάνει τη ροή περιοδική στον χρόνο είναι ποιοτικά ίδια με αυτή που παρατήρησαν οι Karapetsas & Tsamopoulos [5]. Τα θεωρητικά αποτελέσματα είναι σύμφωνα με την υπόθεση των Kissi & Piau & Toussaint [4], δηλαδή ότι για την ύπαρξη της αστάθειας «δέρματος-καρχαρία» δεν

είναι αναγκαία συνθήκη η παραβίαση της συνθήκης μη ολίσθησης, σε αντίθεση με τον Ramamurthy [2] ο οποίος υποστήριξε ότι αυτού του είδους αστάθειες μπορούν να εξαφανιστούν αυξάνοντας της πρόσφυση μεταξύ του ρευστού και τοιχωμάτων. Εξετάζοντας το κρίσιμο ιδιοδιάνυσμα φαίνεται καθαρά ότι η διαταραχή προκαλείται από το ιδιάζον σημείο, δηλαδή το σημείο εξόδου από τον εκβολέα. Τέλος, υπολογίστηκε ο κρίσιμος αριθμός Wi_c για διάφορες τιμές των αριθμών Ca και ϵ .



(a) Κρίσιμες τιμές του αριθμού Wi με αύξηση του αριθμού τριχοειδών δυνάμεων για διάφορες τιμές της ρεολογικής παραμέτρου, ϵ . (b) Φανταστικό μέρος της ασταθούς ιδιοτιμής συναρτήσει του αριθμού Ca . με $\beta=0, l_1=10, l_2=25$. Χρησιμοποιήθηκε το πλέγμα $M3$

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been supported financially by the General Secretariat of Research and Technology of Greece through the program “Excellence” (Grant No. 1918, entitled “FilCoMicrA”) in the framework “Education and Lifelong Learning” co-funded by the European Social Fund and National Resources.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. F. N. Cogswell, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2, 37–47 (1977)
- [2]. A.V. Ramamurthy, *J.Rheol.* 30, 337-357 (1986)
- [3]. D. S. Kalika and M. M. Denn, *J. Rheol.* 31, 815–834 (1987)
- [4]. N. El Kissi, J. M. Piau, F. Toussaint, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 68 (1997) 271-29
- [5]. G. Karapetsas and J. Tsamopoulos, *Phys. Fluids* 21, 123101 (2013)
- [6]. N. Phan-Thien, *J. Rheol.* 22, 259–283 (1978)
- [7]. T.C. Papanastasiou, N. Malamataris, K. Ellwood, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 14 (1992) 587–608
- [8]. G. Karapetsas and J. Tsamopoulos, *Phys. Fluids* 21, 123101 (2009)
- [9]. A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 32, (1982) 199
- [10]. Y. Dimakopoulos, J. Tsamopoulos, *J. Comp. Phys.* 192 (2003) 494–522.