



## ΘΑΛΗΣ - Πανεπιστήμιο Πειραιά Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια

**Δ6 – Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης ευστάθειας  
σε προβλήματα ταξινόμησης**

**Π6 – Τεχνική έκθεση (ανάπτυξη μέτρων  
αξιολόγησης ευστάθειας σε προβλήματα  
ταξινόμησης)**



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΚΡΗΤΗΣ



ΕΘΝΙΚΟ  
ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

## Στοιχεία παραδοτέου

**Δράση:** Δ6 – Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης ευστάθειας σε προβλήματα ταξινόμησης

**Τίτλος παραδοτέου:** Π6 – Τεχνική έκθεση (ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης ευστάθειας σε προβλήματα ταξινόμησης)

**Τύπος παραδοτέου:** S - PU

**Έκδοση:** 02

**Ημερομηνία:** 1 Μαρτίου 2013

**Υπεύθυνος σύνταξης:** Καθηγητής Κωνσταντίνος Ζοπουνίδης

**Ομάδα σύνταξης:** Καθηγητής Νικόλαος Ματσατσίνης  
Αναπληρωτής Καθηγητής Μιχάλης Δούμπος  
Επίκουρος Καθηγητής Παύλος Δελιάς  
Professor Alexis Tsoukias  
Ελευθέριος Μαναρώλη, MSc.  
Δημήτριος Νίκλης, MSc

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή .....	4
2	Αναλυτικές-συνθετικές διαδικασίες για την ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων ταξινόμησης .....	6
3	Μέτρα αξιολόγησης της ευστάθειας .....	9
3.1	Το σύνολο των εφικτών παραμέτρων ενός πολυκριτήριου μοντέλου ταξινόμησης	9
3.2	Μέτρα που βασίζονται στα αποτελέσματα ταξινόμησης.....	10
3.3	Επαναληπτική δειγματοληψία.....	13
4	Συμπεράσματα .....	14
	Βιβλιογραφία .....	15

## 1 Εισαγωγή

Πολλά προβλήματα αποφάσεων απαιτούν την αξιολόγηση ενός πεπερασμένου συνόλου συγκεκριμένων εναλλακτικών δραστηριοτήτων, βάσει σαφώς ορισμένων κριτηρίων αξιολόγησης. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να ενταχθούν σε επιμέρους κατηγορίες ανάλογα με το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα της ανάλυσης:

1. Επιλογή (choice) της καλύτερης εναλλακτικής δραστηριότητας.
2. Κατάταξη (ranking) των εξεταζόμενων εναλλακτικών δραστηριοτήτων από τις καλύτερες προς τις χειρότερες βάσει των χαρακτηριστικών τους.
3. Ταξινόμηση (sorting, discrimination ή classification) των εναλλακτικών δραστηριοτήτων σε προκαθορισμένες κατηγορίες.
4. Περιγραφή (description) των εναλλακτικών δραστηριοτήτων με στόχο τον εντοπισμό των βασικών τους χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων.

Μεταξύ αυτών, τα προβλήματα της επιλογής και της κατάταξης βασίζονται κατά κύριο λόγο σε σχετικές αξιολογήσεις, οι οποίες, για παράδειγμα, οδηγούν στην επιλογή του συγκριτικά καλύτερου τρόπου δράσης ή την κατάταξη των εναλλακτικών από τις συγκριτικά καλύτερες προς τις χειρότερες. Αντίθετα, το πρόβλημα της ταξινόμησης βασίζεται στην πραγματοποίηση απόλυτων συγκρίσεων (absolute comparisons). Κάθε εναλλακτική δραστηριότητα εντάσσεται σε μια προκαθορισμένη κατηγορία βάσει συγκεκριμένων κανόνων απόφασης, οι οποίοι συνήθως αναφέρονται στη σύγκριση με συγκεκριμένα πρότυπα τα οποία διαχωρίζουν τις κατηγορίες.

Τα προβλήματα ταξινόμησης αποτελούν μια σημαντική κατηγορία προβλημάτων λήψης αποφάσεων με πολλές πρακτικές εφαρμογές σε ένα ευρύ πεδίο αντικειμένων: ιατρική, οικονομικά, διαχείριση ενεργειακών συστημάτων, τηλεπικοινωνίες, πληροφορική, διοίκηση επιχειρήσεων και οργανισμών, κá. (Dourmos & Zorounidis, 2002). Το ευρύ πεδίο εφαρμογών προβλημάτων ταξινόμησης έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών από το χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων (ΠΑΑ). Τις τελευταίες δύο δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες για την ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων σε προβλήματα ταξινόμησης. Η πλειοψηφία των σχετικών ερευνών έχει βασιστεί στις αρχές της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης (ΑΣΠ, preference disaggregation approach), μέσω της οποίας είναι δυνατή η ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων από δεδομένα χρησιμοποιώντας διαδικασίες μη παραμετρικής παλινδρόμησης (Jacquet-Lagrèze & Siskos, 2001).

Στο πλαίσιο αυτό ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη της ευστάθειας των αποτελεσμάτων και των μοντέλων που διαμορφώνονται. Η σχετική βιβλιογραφία έχει επικεντρωθεί σε δύο βασικά θέματα. Το πρώτο αφορά την ανάπτυξη μεθοδολογιών και μοντέλων αποφάσεων για την παροχή στον αποφασίζοντα πληροφοριών σχετικά με το εύρος στο οποίο μπορούν να

κυμανθούν τα αποτελέσματα ενός πολυκριτήριου μοντέλου ταξινόμησης, είτε μέσω αναλυτικών τεχνικών (Greco, 2010) ή μέσω προσομοίωσης (Kadzinski & Tervonen, 2013). Το δεύτερο κύριο θέμα αφορά τη διαμόρφωση ενός μοντέλου απόφασης το οποίο αντιπροσωπεύει καλύτερα το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων που θα μπορούσαν να διατυπωθούν με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα (Greco, 2011). Παρόλα αυτά μέχρι σήμερα η διαμόρφωση δεικτών μέτρησης της ευστάθειας σε ανάλογα προβλήματα είναι ένα πεδίο στο οποίο ακόμα και σήμερα η έρευνα είναι μάλλον περιορισμένη.

Στην ενότητα που ακολουθεί περιγράφεται η διαδικασία ανάπτυξης μοντέλων αποφάσεων σε προβλήματα ταξινόμησης μέσω τεχνικών από το πεδίο της ΑΣΠ και στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε ορισμένα μέτρα και δείκτες ευστάθειας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πλαίσιο αυτό.

## 2 Αναλυτικές-συνθετικές διαδικασίες για την ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων ταξινόμησης

Σε πολυκριτήρια προβλήματα ταξινόμησης στόχος είναι η αξιολόγηση ενός ή περισσότερων εναλλακτικών δράσεων μέσω της ένταξής τους σε  $K$  προκαθορισμένες κατηγορίες επιδόσεων  $C_1, \dots, C_q$ , οι οποίες ορίζονται έτσι ώστε η κατηγορία  $C_1$  να αντιστοιχεί στις εναλλακτικές υψηλών επιδόσεων και η κατηγορία  $C_q$  στις εναλλακτικές χαμηλών επιδόσεων. Η αξιολόγηση των εναλλακτικών γίνεται βάσει  $n$  κριτηρίων, οπότε κάθε εναλλακτική  $i$  μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα των επιδόσεών της στα κριτήρια:  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ .

Η ανάπτυξη ενός πολυκριτήριου μοντέλου ταξινόμησης στα πλαίσια της ΑΣΠ απαιτεί τον ορισμό ενός δείγματος αποφάσεων που λαμβάνει ο αποφασίζοντας. Το δείγμα αυτό αφορά εναλλακτικές τις οποίες γνωρίζει ο αποφασίζοντας (π.χ., αποφάσεις που έχει λάβει στο παρελθόν) και τις οποίες μπορεί να ταξινομήσει στις προκαθορισμένες κατηγορίες. Αυτά τα παραδείγματα αποφάσεων διαμορφώνουν ένα σύνολο αναφοράς (reference set)  $R = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1}^M$ , όπου  $M$  είναι το πλήθος των εναλλακτικών στο σύνολο αναφοράς και  $y_i \in \{C_1, \dots, C_q\}$  είναι η ταξινόμηση της εναλλακτικής  $i$  από τον αποφασίζοντα.

Θεωρώντας ένα γενικό μοντέλο απόφασης  $f_\beta(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \{C_1, \dots, C_q\}$  το οποίο παραμετροποιείται από ένα σύνολο παραμέτρων  $\beta$ , στόχος της ΑΣΚ είναι να καθοριστούν κατάλληλες εκτιμήσεις ( $\hat{\beta}$ ) των παραμέτρων έτσι ώστε να διαμορφωθεί ένα μοντέλο ταξινόμησης το οποίο θα είναι όσο το δυνατόν πιο συμβατό γίνεται με το σύστημα αξιών του αποφασίζοντα. Δηλαδή, οι βέλτιστες εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου προκύπτουν από τη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης της ακόλουθης μορφής:

$$\hat{\beta}^* = \operatorname{argmin} L(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$$

όπου  $L$  είναι μια συνάρτηση των αποκλίσεων μεταξύ των αξιολογήσεων του αποφασίζοντα ( $\mathbf{y}$ ) για τις εναλλακτικές του συνόλου  $R$  και αποτελεσμάτων (ταξινομήσεων) του μοντέλου ( $\hat{\mathbf{y}}$ ). Το πρόβλημα (2) μπορεί να λυθεί μέσω κατάλληλων διαδικασιών βελτιστοποίησης εφόσον οριστεί η μορφή του μοντέλου καθώς και της συνάρτησης σφάλματος  $L$ .

Για παράδειγμα, έστω μια γραμμική συνάρτηση αξιών (linear value function) η οποία εκφράζεται ως ένας σταθμισμένος μέσος όρος:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j x_j$$

όπου  $w_j \geq 0$  είναι ο συντελεστής παραχώρησης του κριτηρίου  $j$  ( $w_1 + \dots + w_n = 1$ ). Με τέτοιο μοντέλο αξιολόγησης η ταξινόμηση οποιασδήποτε εναλλακτικής  $i$  μπορεί να γίνει εισάγοντας διαχωριστικά όρια  $t_0 = 1 > t_1 > \dots > t_{q-1} > 0 = t_q$  στην κλίμακα αξιολόγησης  $V$  και χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο απλό κανόνα:

$$t_k < V(\mathbf{x}_i) < t_{k-1} \Leftrightarrow \text{Η εναλλακτική } i \text{ ταξινομείται στην κατηγορία } k$$

Θεωρώντας επομένως ένα σύνολο αναφοράς με εναλλακτικές ταξινομημένες σε  $q$  κατηγορίες, οι συντελεστές παραχώρησης των κριτηρίων που ελαχιστοποιούν τις διαφορές μεταξύ των ταξινομήσεων του αποφασίζοντα και των αποτελεσμάτων του μοντέλου μπορούν να βρεθούν από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος (ΓΠ):

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad E = \sum_{i=1}^q (e_i^+ + e_i^-) \\ \text{Υπό:} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} + e_i^+ \geq t_k + \delta \quad \forall i \in C_k, k=1, \dots, q-1 \\ \quad \quad \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} - e_i^- \leq t_{k-1} - \delta \quad \forall i \in C_k, k=2, \dots, q \\ \quad \quad t_k - t_{k+1} \geq \varepsilon \quad k=1, \dots, q-2 \\ \quad \quad w_1 + \dots + w_n = 1 \\ \quad \quad w_j, t_k, e_i^+, e_i^- \geq 0 \quad \forall i, j, k \end{array} \right\} \quad (LP)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση αυτού του ΓΠ αφορά την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων των αποτελεσμάτων του μοντέλου για τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς. Για κάθε εναλλακτική που έχει ταξινομηθεί από τον αποφασίζοντα στην κατηγορία  $k$ , τα σφάλματα ορίζονται σε σχέση με τα δύο όρια της κατηγορίας ως εξής:  $e_i^+ = \max\{0, t_k + \delta - V(\mathbf{x}_i)\}$  (παραβίαση του κάτω ορίου  $t_k$ ) και  $e_i^- = \max\{0, V(\mathbf{x}_i) - t_{k-1} + \delta\}$  (παραβίαση του άνω ορίου  $t_{k-1}$ ), όπου  $\delta$  είναι μια μικρή θετική σταθερά. Οι δύο πρώτοι περιορισμοί ορίζουν τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών σφάλματος, των ορίων των κατηγοριών και της αξιολόγησης των εναλλακτικών, ενώ ο τρίτος περιορισμός ορίζει ένα ελάχιστο εύρος για κάθε κατηγορία ( $\varepsilon$  είναι μια μικρή θετική σταθερά). Μια ολοκληρωμένη βιβλιογραφική ανασκόπηση άλλων διατυπώσεων και προσεγγίσεων για την ανάπτυξη πολυκριτήριων μοντέλων ταξινόμησης μέσω της ΑΣΠ δίνεται στην εργασία των Zorounidis & Doumros (2002).

Συμβολίζοντας ως  $E^*$  τη βέλτιστη (ελάχιστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του παραπάνω ΓΠ, εύκολα είναι κατανοητό ότι εάν  $E^* = 0$ , τότε έχει βρεθεί ένα μοντέλο ταξινόμησης το οποίο είναι συμβατό με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντα. Ταυτόχρονα όμως το μοντέλο αυτό δεν είναι μοναδικό, καθώς το πολύεδρο  $P$  που διαμορφώνεται από τους παρακάτω περιορισμούς δεν είναι κενό:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} &\geq t_k + \delta & \forall i \in C_k, k=1, \dots, q-1 \\
 \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} &\leq t_{k-1} - \delta & \forall i \in C_k, k=2, \dots, q \\
 t_k - t_{k+1} &\geq \varepsilon & k=1, \dots, q-2 \\
 w_1 + \dots + w_n &= 1 \\
 w_j, t_k &\geq 0 & \forall i, j, k
 \end{aligned} \right\} (P)$$

Το ίδιο φαινόμενο προκύπτει ακόμα και εάν  $E^* > 0$ . Επομένως, προκύπτουν ερωτήματα όσον αφορά την ευστάθεια του μοντέλου, καθώς διαφορετικές λύσεις εντός του παραπάνω πολυέδρου είναι πιθανόν να αντιστοιχούν σε πολύ διαφορετικά μοντέλα αξιολόγησης, η χρήση των οποίων για την αξιολόγηση εναλλακτικών εκτός του συνόλου αναφοράς μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά αποτελέσματα. Επιπλέον, η ευστάθεια του μοντέλου πρέπει να εξεταστεί και σε σχέση με τα δεδομένα του συνόλου αναφοράς που χρησιμοποιείται καθώς μεταβολές στις εναλλακτικές του συνόλου αυτού μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές μεταβολές των εκτιμήσεων που προκύπτουν για το τελικό μοντέλο απόφασης από τη λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης της παραπάνω μορφής.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω θέματα καλύπτουν μοντέλα ταξινόμησης πολλών μορφών, όπως γενικές συναρτήσεις αξιών (Angilella, 2004), μοντέλα σχέσεων υπεροχής (Teronen et al., 2009), καθώς και μοντέλα υπό τη μορφή κανόνων απόφασης (Greco et al., 2002).



### 3 Μέτρα αξιολόγησης της ευστάθειας

Η ανάλυση της ευστάθειας στη χρήση διαδικασιών από το πεδίο της ΑΣΠ για την ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων σε προβλήματα πολυκριτήριας ταξινόμησης μπορεί να βασιστεί στη μοντελοποίηση που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Όπως αναφέρθηκε, το γενικό πλαίσιο της μοντελοποίησης αυτής επιτρέπει την άμεση επέκταση σε διάφορους τύπους μοντέλων αποφάσεων. Στην ενότητα αυτή αναλύονται ορισμένα μέτρα και διαδικασίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση της ευστάθειας στο πλαίσιο αυτό.

#### 3.1 Το σύνολο των εφικτών παραμέτρων ενός πολυκριτήριου μοντέλου ταξινόμησης

Μια πρώτη προσέγγιση για τη μέτρηση της ευστάθειας των πολυκριτήριων μοντέλων ταξινόμησης που αναπτύσσονται στα πλαίσια διαδικασιών της ΑΣΠ είναι η μελέτη του συνόλου των βέλτιστων λύσεων του προβλήματος (LP) ή εναλλακτικά του συνόλου των λύσεων που ικανοποιούν τους περιορισμούς (P). Όπως προαναφέρθηκε κάθε διαφορετική λύση αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό μοντέλο απόφασης, τα αποτελέσματα του οποίου για τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς ταυτίζονται με τις ταξινομήσεις-αποφάσεις του αποφασίζοντα. Καθένα όμως από αυτά μοντέλα μπορεί να δώσει πολύ διαφορετικά αποτελέσματα κατά την αξιολόγηση νέων εναλλακτικών εκτός του συνόλου αναφοράς.

Συνεπώς, το εύρος των εναλλακτικών μοντέλων που συμφωνούν με την ταξινόμηση των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς αποτελεί μια ένδειξη της ευστάθειας των αποτελεσμάτων. Ως μέτρο του εύρους αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο όγκος του πολυέδρου που διαμορφώνεται από τους περιορισμούς (P). Γενικά, η ακριβής μέτρηση του όγκου ενός πολυέδρου είναι ένα πρόβλημα υψηλής υπολογιστικής δυσκολίας. Για το λόγο αυτό έχει επικρατήσει η χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων, όπως ο αλγόριθμος των Lovász & Vempala (2006), ο οποίος βασίζεται σε μια μεθοδολογία παρόμοια με αυτή της προσομοιωμένης απόπτωσης (simulated annealing) σε συνδυασμό με διαδικασίες προσομοίωσης Monte Carlo πολλαπλών φάσεων (multi-phase Monte Carlo sampling).

Χρησιμοποιώντας διαδικασίες προσομοίωσης για την παραγωγή  $S$  τυχαίων σεναρίων για τις εφικτές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου απόφασης, ένα μέτρο της ευστάθειας που βασίζεται στον όγκο του πολυέδρου (P) μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$v = S / N$$

όπου  $N$  είναι το πλήθος των προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν ώστε να διαμορφωθεί το επιθυμητό πλήθος των αποδεκτών σεναρίων για τις παραμέτρους του

μοντέλου απόφασης. Ο δείκτης αυτός κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Τιμές κοντά στο μηδέν υποδεικνύουν ότι το πολύεδρο των εφικτών λύσεων έχει μικρό όγκο και επομένως υπάρχει ένα περιορισμένο σύνολο για τις παραμέτρους του μοντέλου που συμφωνεί με τις αξιολογήσεις του συνόλου αναφοράς. Αντίθετα, τιμές κοντά στη μονάδα δείχνουν ότι σχεδόν οποιοσδήποτε τιμές για τις παραμέτρους του μοντέλου ταξινόμησης συμφωνούν με τις πληροφορίες που παρέχουν τα παραδείγματα αποφάσεων του συνόλου αναφοράς.

### Παράδειγμα:

Έστω το σύνολο αναφοράς του παρακάτω πίνακα, στο οποίο έξι εναλλακτικές έχουν αξιολογηθεί σε τρία κριτήρια και έχουν ταξινομηθεί σε δύο κατηγορίες.

Εναλλακτικές	Κριτήρια			Ταξινόμηση
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_1$	7	1	8	$C_1$
$x_2$	4	5	8	$C_1$
$x_3$	10	4	2	$C_1$
$x_4$	2	4	1	$C_2$
$x_5$	4	1	1	$C_2$
$x_6$	1	2	5	$C_2$

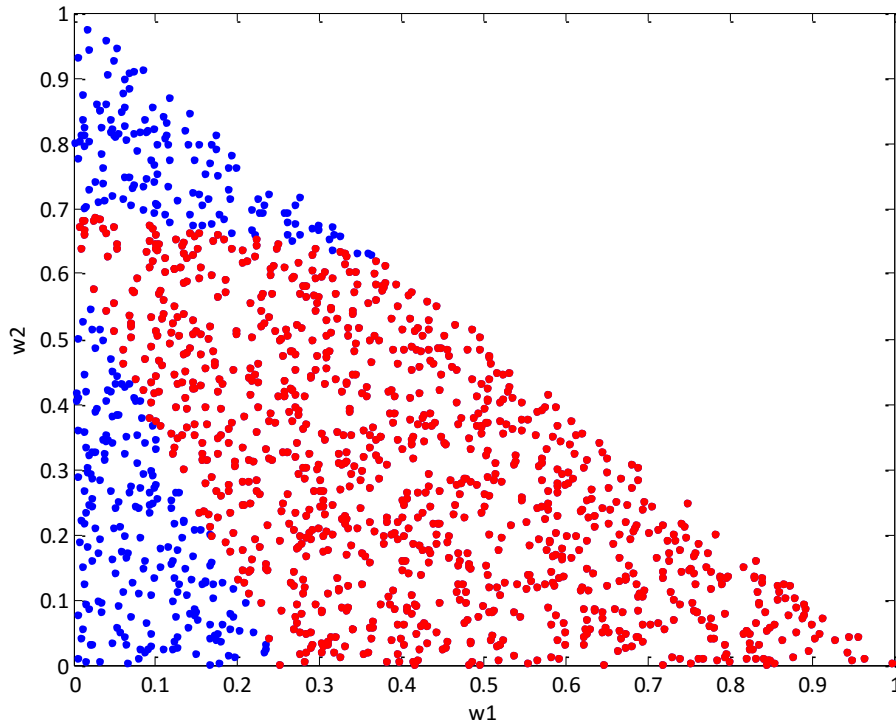
Θεωρώντας ένα μοντέλο ταξινόμησης με τη μορφή ενός σταθμισμένου μέσου όρου  $V(\mathbf{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$ , με  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$  και  $w_1, w_2, w_3 \geq 0$ , οι συντελεστές παραχώρησης που συμφωνούν με την ταξινόμηση των εναλλακτικών θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε  $\min\{V(\mathbf{x}_1), V(\mathbf{x}_2), V(\mathbf{x}_3)\} \geq \max\{V(\mathbf{x}_4), V(\mathbf{x}_5), V(\mathbf{x}_6)\}$ . Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει 1000 τυχαία διανύσματα (κόκκινα σημεία) για τους συντελεστές στάθμισης ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο των αποδεκτών λύσεων. Για την παραγωγή των τυχαίων αυτών διανυσμάτων απαιτήθηκε η πραγματοποίηση 1341 προσομοιώσεων. Στις 341 προσομοιώσεις διαμορφώθηκαν διανύσματα για τους συντελεστές στάθμισης (στο σχήμα είναι σημειωμένα σε μπλε χρώμα), τα οποία οδηγούν σε αξιολόγηση των έξι εναλλακτικών κατά τρόπο διαφορετικό από την προκαθορισμένη ταξινόμηση. Επομένως, η εκτίμηση της ευστάθειας είναι:

$$v = S / N = 1000 / 1341 = 0,7457$$

## 3.2 Μέτρα που βασίζονται στα αποτελέσματα ταξινόμησης

Ο όγκος του πολύεδρου που οριοθετεί τις αποδεκτές τιμές για τις παραμέτρους ενός πολυκριτηρίου μοντέλου ταξινόμησης, αποτελεί μια ένδειξη των εναλλακτικών μοντέλων που μπορούν να διαμορφωθούν από τις πληροφορίες που παρέχει ένα σύνολο αναφοράς,

αλλά αγνοεί την ευστάθεια των αποτελεσμάτων-ταξινομήσεων που μπορούν να προκύψουν από τα μοντέλα αυτά.



Σχήμα 3.1 Αποτελέσματα προσομοίωσης παραδείγματος

Για να ληφθεί υπόψη το στοιχείο αυτό, έστω ότι έχουν εντοπιστεί  $L$  εναλλακτικά μοντέλα ταξινόμησης, τα οποία είναι συμβατά με τις ταξινομήσεις του συνόλου αναφοράς. Η εφαρμογή ενός μοντέλου  $\ell$  για την ταξινόμηση μιας εναλλακτικής  $x_i$  εκτός του συνόλου αναφοράς, παρέχει μια εκτίμηση  $\hat{y}_{i\ell} \in \{C_1, \dots, C_q\}$  για την ταξινόμηση της εναλλακτικής σε κάποια από τις προκαθορισμένες κατηγορίες. Η συχνότητα με την οποία η εναλλακτική εντάσσεται στην κατηγορία  $k$  συμβολίζεται ως  $p_{ik}$ . Με βάση τις συχνότητες αυτές μπορούν να υπολογιστούν οι ακόλουθοι δείκτες:

- Δείκτης των Herfindahl-Hirschman:

$$HI_i = \frac{1}{1 - 1/q} \left( \sum_{k=1}^q p_{ik}^2 - \frac{1}{q} \right)$$

Ο δείκτης των Herfindahl-Hirschman χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων σε οικονομικά συστήματα (μέτρηση του βαθμού συγκέντρωσης σε ανταγωνιστικές αγορές, Hirschman, 1945) καθώς και για τη μέτρηση της βιοποικιλότητας (Simpson, 1949) σε περιβαλλοντικά συστήματα. Ο δείκτης αυτός κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Τιμές του δείκτη κοντά στη μονάδα υποδεικνύουν μια ευσταθή ταξινόμηση της εναλλακτικής, καθώς στην περίπτωση αυτή η μεγάλη πλειοψηφία των μοντέλων ταξινομεί την εναλλακτική σε μια

συγκεκριμένη κατηγορία. Αντίθετα τιμές του δείκτη κοντά στο μηδέν υποδηλώνουν ασταθή αποτελέσματα τα οποία χαρακτηρίζονται από υψηλό βαθμό τυχαιότητας ( $p_{ik} \approx 1/q$ ).

- Εντροπία (Shannon, 1948):

$$E_i = -\frac{1}{\log q} \sum_{k=1}^q p_{ik} \log p_{ik}$$

Η εντροπία κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$  με τιμές κοντά στη μονάδα να υποδεικνύουν μεγάλη αστάθεια στα αποτελέσματα των μοντέλων ( $p_{ik} \approx 1/q$ ), ενώ τιμές κοντά στο μηδέν υποδηλώνουν ότι η ταξινόμηση της εναλλακτικής είναι ευσταθής, καθώς η μεγάλη πλειοψηφία των μοντέλων ταξινομεί την εναλλακτική σε μια συγκεκριμένη κατηγορία.

Οι δύο παραπάνω δείκτες μπορούν να επεκταθούν και στη μελέτη των ταξινομήσεων για ένα σύνολο εναλλακτικών. Δεδομένου ότι περισσότερα του ενός μοντέλα μπορούν να δίνουν την ίδια ακριβώς ταξινόμηση για όλες τις εναλλακτικές, μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν  $D \leq L$  διακριτά διανύσματα  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_D$  με τις ταξινομήσεις των εναλλακτικών από τα  $L$  μοντέλα αξιολόγησης. Συμβολίζοντας ως  $\pi_k$  τη συχνότητα εμφάνισης του διανύσματος  $\hat{y}_k$ , ο δείκτης των Herfindahl-Hirschman και η εντροπία του συνόλου των αξιολογήσεων μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$HI = \frac{1}{1 - 1/D} \left( \sum_{k=1}^D \pi_k^2 - \frac{1}{D} \right) \quad E = -\frac{1}{\log D} \sum_{k=1}^D \pi_k \log \pi_k$$

Οι παραπάνω δείκτες εστιάζονται στη μέτρηση της ευστάθειας για το σύνολο των αποτελεσμάτων που μπορούν να διαμορφωθούν από ένα σύνολο  $L$  μοντέλων αξιολόγησης, αλλά δεν παρέχουν μια εκτίμηση για την ευστάθεια μιας συγκεκριμένης ταξινόμησης των εναλλακτικών. Έστω λοιπόν ότι με βάση τα αποτελέσματα  $L$  μοντέλων, μια εναλλακτική  $x_i$  (εκτός του συνόλου αναφοράς), ταξινομείται στην κατηγορία  $k_i^*$ . Η ταξινόμηση αυτή μπορεί για παράδειγμα να βασιστεί στην εξέταση των συχνοτήτων  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iq}$  με τις οποίες ταξινομείται η εναλλακτική στις  $q$  κατηγορίες σύμφωνα με τα  $L$  μοντέλα αξιολόγησης. Ως μέτρο της ευστάθειας της ταξινόμησης αυτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη μέση τετραγωνική απόκλιση:

$$S_i = \frac{1}{(q-1)^2} \sum_{k=1}^q p_{ik} (k_i^* - k)^2$$

Όπως και οι προηγούμενοι δείκτες, έτσι και αυτός κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Χαμηλές τιμές του δείκτη υποδεικνύουν μικρές διαφοροποιήσεις στην ταξινόμηση μιας εναλλακτικής από τα διαθέσιμα μοντέλα απόφασης, ενώ μεγαλύτερες τιμές (κοντά στη μονάδα) υποδηλώνουν μεγάλη αστάθεια στα αποτελέσματα. Αντίστοιχα, για ένα σύνολο  $m'$  εναλλακτικών μπορεί να υπολογιστεί η συνολική μέση τετραγωνική απόκλιση:

$$S = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} S_i$$

### 3.3 Επαναληπτική δειγματοληψία

Τα μέτρα που παρουσιάστηκαν στις παραπάνω ενότητες λαμβάνουν υπόψη την ευστάθεια ως προς ένα συγκεκριμένο σύνολο αναφοράς, αλλά δεν παρέχουν εκτιμήσεις σε σχέση με πιθανές μεταβολές των δεδομένων του συνόλου αναφοράς. Στα πλαίσια της ΑΣΠ το σύνολο αναφοράς συνήθως περιλαμβάνει ένα μικρό αριθμό εναλλακτικών. Το στοιχείο αυτό μπορεί να επιδράσει στην ευστάθεια του μοντέλου ταξινόμησης, καθώς μικρές τροποποιήσεις στο σύνολο αναφοράς (προσθήκη ή αφαίρεση εναλλακτικών) μπορεί να επιφέρουν σημαντικές αλλαγές στο μοντέλο απόφασης.

Για την ανάλυση της ευστάθειας της διαδικασίας μοντελοποίησης σε μεταβολές του συνόλου αναφοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές δειγματοληψίας όπως το bootstrap (Efron & Tibshirani, 1993). Το bootstrap χρησιμοποιείται εκτενώς στα πλαίσια της στατιστικής θεωρίας μάθησης ως μέσω ανάλυσης της ευστάθειας στατιστικών εκτιμήσεων που προκύπτουν από μη παραμετρικές τεχνικές μάθησης. Αντίστοιχα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στα πλαίσια της ανάλυσης ευστάθειας σε διαδικασίες από το χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης και της ΑΣΠ.

Ειδικότερα έστω ένα σύνολο αναφοράς αποτελούμενο από  $m$  εναλλακτικές. Η διαδικασία του bootstrap αφορά τη διαμόρφωση  $B$  τυχαίων δειγμάτων καθένα από τα οποία περιλαμβάνει  $m$  παρατηρήσεις τυχαία επιλεγμένες με επανατοποθέτηση από το σύνολο των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς. Η επιλογή με επανατοποθέτηση σημαίνει ότι κάποιες εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς θα συμμετέχουν σε κάθε δείγμα bootstrap περισσότερες από μια φορές, ενώ άλλες εναλλακτικές δεν θα περιλαμβάνονται καθόλου στο δείγμα. Κάθε δείγμα bootstrap χρησιμοποιείται ως ένα διαφορετικό σύνολο αναφοράς. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσονται  $B$  μοντέλα ταξινόμησης χρησιμοποιώντας καθένα από τα δείγματα bootstrap. Για κάθε δείγμα bootstrap υπολογίζονται τα μέτρα ευστάθειας που αναλύθηκαν στις παραπάνω ενότητες. Με την ολοκλήρωση της ανάλυσης διαμορφώνεται μια ασφαλής εκτίμηση για την αναμενόμενη τιμή των μέτρων ευστάθειας από το μέσο όρο των  $B$  εκτιμήσεων των δειγμάτων bootstrap. Με τον τρόπο αυτό περιορίζεται η μεροληψία των εκτιμήσεων που διαμορφώνονται από τη χρήση ενός και μόνο συνόλου αναφοράς.

## 4 Συμπεράσματα

Η μέτρηση της ευστάθειας είναι ένα θέμα ιδιαίτερης σημασίας στα πλαίσια μοντέλων αποφάσεων που αναπτύσσονται μέσω τεχνικών ΑΣΠ. Τα μέτρα που παρουσιάστηκαν στην αναφορά αυτή είναι εύκολα στη χρήση τους, έχουν σαφή ερμηνεία ως προς την ευστάθεια των αποτελεσμάτων, και παρέχουν μια συνολική εικόνα της ευστάθειας λαμβάνοντας υπόψη διαφορετικές πτυχές της και παράγοντες που την καθορίζουν.

Σε δεύτερο επίπεδο, η έρευνα θα πρέπει να επικεντρωθεί στην εμπειρισταωμένη ανάλυση και αξιολόγηση των χαρακτηριστικών των μέτρων αυτών και των πληροφοριών που παρέχουν στη μέτρηση της ευστάθειας. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να πραγματοποιηθεί η εφαρμογή τους σε τεχνητά δεδομένα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μέσω μιας αναλυτική υπολογιστικής ανάλυσης, καθώς και εμπειρικές αναλύσεις σε πραγματικά δεδομένα.

## Βιβλιογραφία

- Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., & Matarazzo, B. (2004). Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research*, 158(3), 734-744.
- Doumpos, M., & Zopounidis, C. (2002). *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Efron, B., & Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, Boca Raton, FL.
- Greco, S., Kadzinski, M., & Slowinski, R. (2011). Selection of a representative value function in robust multiple criteria sorting. *Computers and Operations Research*, 38(11), 1620-1637.
- Greco, S., Mousseau, V., & Slowinski, R. (2010). Multiple criteria sorting with a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, 207(3), 1455-1470.
- Greco, S., Matarazzo, B., & Slowinski, R. (2002). Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria. *European Journal of Operational Research*, 138(2), 247-259.
- Hirschman, A.O. (1945). *National Power and the Structure of Foreign Trade*. University of California Press, Berkeley.
- Jacquet-Lagrèze, E., & Siskos, Y. (2001). Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience. *European Journal of Operational Research*, 130, 233-245.
- Kadzinski, M., & Tervonen, T. (2013). Stochastic ordinal regression for multiple criteria sorting problems. *Decision Support Systems* (to appear).
- Lovász, L., & Vempala, S. (2006). Simulated annealing in convex bodies and an  $O^*(n^4)$  volume algorithm. *Journal of Computer and System Sciences*, 72(2), 392-417.
- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423, 623-656.
- Simpson, E.H. (1949). Measurement of diversity. *Nature*, 163, 688.
- Tervonen, T., Figueira, J.R., Lahdelma, R., Almeida Dias, J., & Salminen, P. (2009). A stochastic method for robustness analysis in sorting problems. *European Journal of Operational Research*, 192(1), 236-242.
- Zopounidis, C., & Doumpos, M. (2002). Multicriteria classification and sorting methods: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 138(2), 229-246