



**ΘΑΛΗΣ - Πανεπιστήμιο Πειραιά**  
**Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της**  
**ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων**  
**με πολλαπλά κριτήρια**

**Δ11: Πειραματική αξιολόγηση μέτρων**  
**ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού**  
**προγραμματισμού**

**Π11 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση**  
**μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα**  
**πολυστοχικού προγραμματισμού)**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**  
**ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΚΡΗΤΗΣ**



**ΕΘΝΙΚΟ**  
**ΜΕΤΣΟΒΙΟ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

## Στοιχεία παραδοτέου

**Δράση:** Δ11 – Πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού

**Τίτλος παραδοτέου:** Π11 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού)

**Τύπος παραδοτέου:** S - ΡU

**Έκδοση:** 01

**Ημερομηνία:** 28 Οκτωβρίου 2013

**Υπεύθυνος σύνταξης:** Καθηγητής Ιωάννης Ψαρράς

**Ομάδα σύνταξης:** Αναπληρωτής Καθηγητής Δημήτριος Ασκούνης

Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Μαυρωτάς

Δρ. Χάρης Δούκας

Δρ. Παναγιώτης Ξυδώνας

Ελευθέριος Σίσκος, MSc.

Professor Jose Figueira

## Περιεχόμενα

<b>1. Εισαγωγή</b> .....	<b>4</b>
<b>2. Προτεινόμενη μεθοδολογία πολυστοχικής ευστάθειας και περιγραφή των εργαλείων</b> .....	<b>6</b>
2.1 Η ευστάθεια στο πρόβλημα της επιλογής επενδυτικών σχεδίων .....	6
2.2 Στοχαστική προσέγγιση.....	7
2.3 Η μέθοδος ΙΤΑ .....	9
2.4 Η Πολυστοχική μέθοδος AUGMECON .....	10
<b>3. Ορισμός – περιγραφή του πειράματος</b> .....	<b>12</b>
3.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	12
3.1.1 <i>Τυποποίηση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων</i> .....	13
3.1.2 <i>Τυποποίηση των περιορισμών</i> .....	13
3.2 Τα βήματα της μεθοδολογία ανάλυσης ευστάθειας.....	16
<b>4. Επίλυση εφαρμογής και πειραματική αξιολόγηση</b> .....	<b>20</b>
<b>5. Συμπεράσματα</b> .....	<b>27</b>
<b>Βιβλιογραφία</b> .....	<b>30</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι</b> .....	<b>31</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ</b> .....	<b>33</b>

## 1. Εισαγωγή

Η συγκεκριμένη δράση, συνοδευόμενη από το παρόν παραδοτέο Π.11, αφορά στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των μέτρων και μεθοδολογιών ευστάθειας, που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της δράσης Δ.10, σε **προβλήματα αναφοράς (benchmarks)**. Στη Δ.10 αναπτύχθηκαν μέτρα αξιολόγησης της ευστάθειας σε προβλήματα γραμμικής και μη γραμμικής βελτιστοποίησης και διαμορφώθηκαν νέες διαδικασίες πολυκριτήριας βελτιστοποίησης που συμβάλλουν στον εντοπισμό του συνόλου των αποτελεσματικών λύσεων κατά ένα ευσταθή τρόπο. Τα προβλήματα αναφοράς στα οποία δίνεται προτεραιότητα είναι προβλήματα γραμμικής βελτιστοποίησης με περισσότερες της μίας αντικειμενικές συναρτήσεις, όπου διαμορφώνονται νέες διαδικασίες **πολυκριτήριας βελτιστοποίησης ευστάθειας** (ευσταθής πολυστοχικός γραμμικός προγραμματισμός) και είναι διαθέσιμα από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Με τον όρο **ευστάθεια** στον Μαθηματικό Προγραμματισμό εννοούμε το κατά πόσο είναι ευαίσθητη η βέλτιστη λύση σε μεταβολές των παραμέτρων του προβλήματος, όπως έχει ήδη αναλυθεί στο παραδοτέο Π.9 και Π.10. Η έννοια δηλαδή της ευστάθειας είναι συνυφασμένη με την έννοια της αβεβαιότητας ως προς τις παραμέτρους του προβλήματος. Η ερευνητική δουλειά για την μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης στρέφεται προς δύο κατευθύνσεις: (1) την ευστάθεια του μετώπου Pareto (Pareto front) και (2) την ευστάθεια μια συγκεκριμένης κατά Pareto βέλτιστης λύσης.

Στόχος του παρόντος παραδοτέου είναι η επαλήθευση της αποτελεσματικότητας και αξιοποίηση των προηγούμενων θεωρητικών ευρημάτων και μεθοδολογιών σε προβλήματα μικρής κλίμακας. Απώτερος σκοπός του είναι να αποτελέσει το στρατηγικό εργαλείο για την ομαλή μετάβαση από το μεθοδολογικό επίπεδο της Δ.10 στο πρακτικό επίπεδο της επίλυσης πραγματικών προβλημάτων μεγάλων διαστάσεων που θα εξεταστεί στη δράση Δ.12. Η αξιολόγηση των μέτρων ευστάθειας θα γίνει για τρεις περιπτώσεις προβλημάτων μεγάλης κλίμακας.

- Ευστάθεια του μετώπου Pareto με βάση τη στοχαστική προσέγγιση
- Ευστάθεια του μετώπου Pareto με βάση την προσέγγιση minimax regret
- Ευστάθεια μιας μεμονωμένης Pareto βέλτιστης λύσης

Στο παρόν παραδοτέο, εξετάζεται η πρώτη περίπτωση της ευστάθειας του μετώπου Pareto με βάση τη στοχαστική προσέγγιση σε ένα κατάλληλα σχεδιασμένο υπολογιστικό πείραμα. Το πείραμα αυτό αφορά σε πρόβλημα βέλτιστης επιλογής επενδυτικού χαρτοφυλακίου ενεργειακών έργων.

Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζεται το υπολογιστικό πείραμα κατάλληλα για να μελετηθεί η ευστάθεια του μετώπου Pareto όταν υπάρχει στοχαστική αβεβαιότητα στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης. Το υπολογιστικό πείραμα θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: Θα είναι ένα πρόβλημα Πολυκριτηριακού Ακέραιου Προγραμματισμού με δύο αντικειμενικές συναρτήσεις και 40 δυαδικές μεταβλητές απόφασης. Οι συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων θα ακολουθούν (α) κανονική και (β) ομοιόμορφη κατανομή.

Σκοπός των υπολογιστικών πειραμάτων είναι να διαπιστωθεί αν το σχετικό μέτρο ευστάθειας που θα υπολογιστεί μπορεί να δώσει ασφαλή συμπεράσματα και τι είδους συμπεράσματα στον αποφασίζοντα, σχετικά με την ευστάθεια του μετώπου Pareto ή των μεμονωμένων Pareto βέλτιστων λύσεων.

Το παραδοτέο κείμενο δομείται σε 5 διακριτά Κεφάλαια συμπεριλαμβανομένης της Εισαγωγής. Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφεται η μεθοδολογία αξιολόγησης των μέτρων ευστάθειας όπως αναπτύχθηκε στη Δράση Δ.10 μαζί με τα εργαλεία και τις μεθόδους που εφαρμόστηκαν. Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του πειραματικού προβλήματος σε αντιπαραβολή με τη μαθηματική του μοντελοποίηση. Η επίλυση του προβλήματος σύμφωνα με τη μεθοδολογία αξιολόγησης της ευστάθειας των λύσεων μαζί με τα ποσοτικά αποτελέσματα που εξήχθησαν, περιγράφονται στο Κεφάλαιο 4. Το παραδοτέο κλείνει με το Κεφάλαιο 5 των συμπερασμάτων που ακολουθείται από τα Παραρτήματα και τη Βιβλιογραφία.

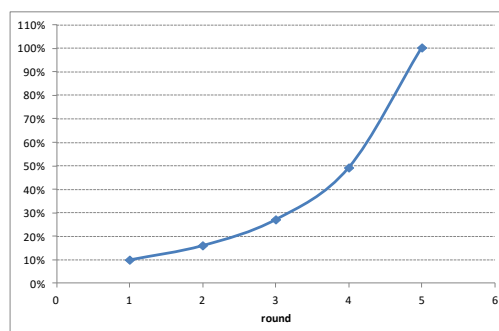
## 2. Προτεινόμενη μεθοδολογία πολυστοχικής ευστάθειας και περιγραφή των εργαλείων

Το παρόν συνδετικό κεφάλαιο πραγματοποιεί μια αναδρομή στη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε κατά τη δράση Δ.10 για την ανάλυση και τον έλεγχο της ευστάθειας του μετώπου Pareto (Pareto frontier) στον πολυστοχικό γραμμικό προγραμματισμό. Η σύντομη περιγραφή των εργαλείων και της μεθοδολογίας που προτάθηκαν έχει ως σκοπό την ομαλή μετάβαση και εξοικείωση με την πειραματική διαδικασία που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

### 2.1 Η ευστάθεια στο πρόβλημα της επιλογής επενδυτικών σχεδίων

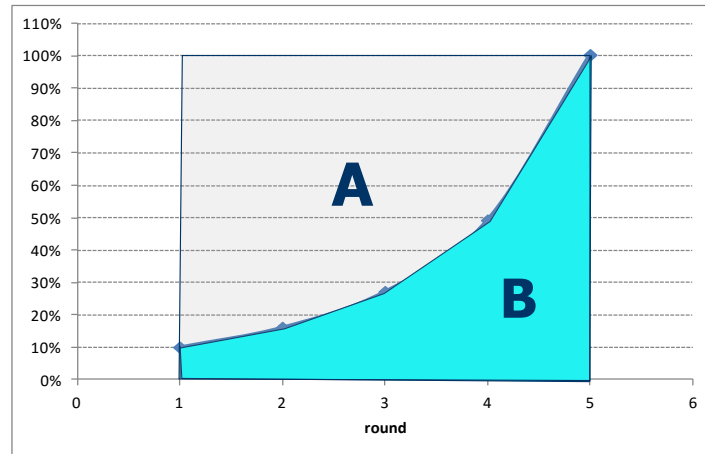
Για το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου έργων (Project Portfolio Selection), στο οποίο θα επικεντρώνεται κυρίως το παρόν παραδοτέο μπορούμε να ορίσουμε την ευστάθεια με τον εξής τρόπο. Να εκτιμήσουμε όχι μόνο την ευστάθεια του τελικού χαρτοφυλακίου αλλά και τον βαθμό εμπιστοσύνης της συμμετοχής κάθε έργου σε αυτό. Η διαδικασία ονομάζεται Iterative Trichotomic Approach (Manrotas & Pechak, 2013) και ουσιαστικά χωρίζει τα έργα σε “Green”, “Red”, “Grey”. Τα green projects είναι αυτά που σίγουρα συμμετέχουν στο τελικό portfolio, τα red projects αυτά που σίγουρα δεν συμμετέχουν και τα grey projects αυτά που χρειάζονται περαιτέρω εξέταση. Βασικός σκοπός της μεθόδου ITA είναι, ακολουθώντας μια επαναληπτική διαδικασία, να καταταχτούν όλα τα έργα ως “Green” ή “Red”. Η μέθοδος ITA περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Στο συγκεκριμένο έργο θα προταθεί κι ένας συντελεστής ευστάθειας για το τελικό portfolio με βάση τον αριθμό των έργων που εντάσσεται στο τελικό χαρτοφυλάκιο σε κάθε γύρο της μεθόδου ITA. Συγκεκριμένα η λογική είναι ότι κατασκευάζεται η αθροιστική καμπύλη συμμετοχής στο τελικό χαρτοφυλάκιο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Αθροιστική καμπύλη συμμετοχής έργων στο τελικό χαρτοφυλάκιο

Στον κάθετο άξονα είναι το ποσοστό των έργων που υπάρχουν στο τελικό χαρτοφυλάκιο και στον οριζόντιο άξονα ο αντίστοιχος γύρος. Το μέτρο ευστάθειας του τελικού χαρτοφυλακίου ορίζεται ως το εμβαδό κάτω από την αθροιστική καμπύλη συμμετοχής (B) ως προς το εμβαδό της μέγιστης ευστάθειας (A), βλέπε Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Εμβαδό κάτω από την αθροιστική καμπύλη συμμετοχής έργων στο τελικό χαρτοφυλάκιο (B) και εμβαδό μέγιστης ευστάθειας (A)

Το μέτρο ευστάθειας RM εμβαδό κάτω από την καμπύλη αυτή με βάση τους ακόλουθους τύπους:

$$RM = \left[ \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} \right] / (n-1)$$

$$RM = \left[ \frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \right] / (n-1) = \left[ \frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{1}{2} \right] / (n-1)$$

Όπου τα  $a_i$  είναι οι αντίστοιχες τεταγμένες των σημείων καμπής και  $n$  ο αριθμός των γύρων. Για παράδειγμα στο συγκεκριμένο σχήμα υπολογίζεται

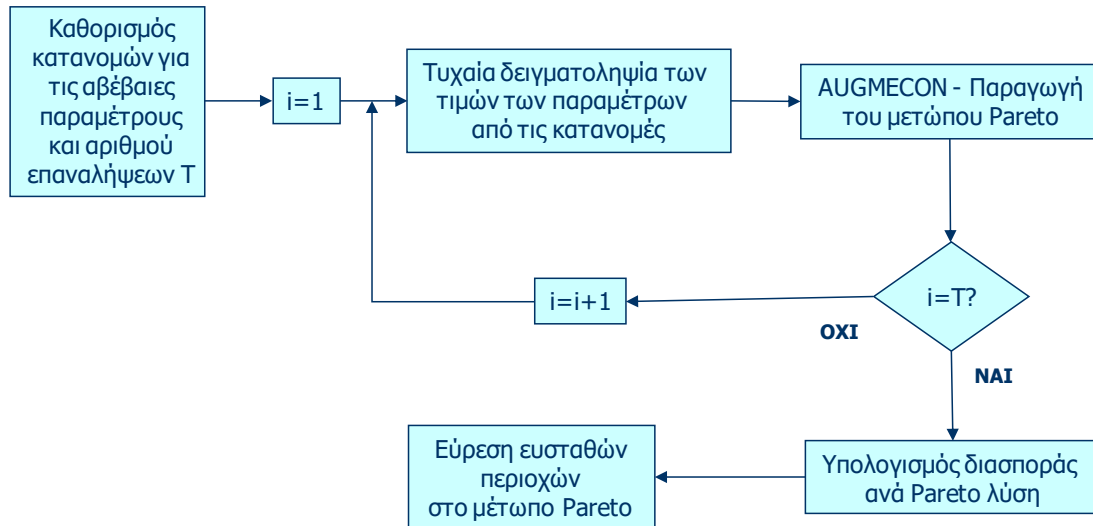
$$RM = \left[ \frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{1}{2} \right] / (n-1) = \frac{0.1}{2} + 0.16 + 0.27 + 0.49 + \frac{1}{2} = 0.3675$$

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και παρουσιάστηκε στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας σε στρατιωτικά θέματα AMIMS 2013 (<http://www.sse.gr/files/programma%20synedrioy.pdf>) με τον τίτλο “Combining mathematical programming and Monte Carlo simulation to deal with uncertainty in project portfolio selection”.

## 2.2 Στοχαστική προσέγγιση

Η αβεβαιότητα στις παραμέτρους είναι στοχαστικής φύσεως δηλαδή ποσοτικοποιείται με την μορφή **κατανομών πιθανότητας**. Χρησιμοποιείται συνδυασμός Πολυκριτηριακής

Βελτιστοποίησης και **Monte Carlo simulation** (Vose, 1996; 2006). Η διαδικασία είναι η εξής: Καταρχήν ορίζεται ο τύπος και οι παράμετροι των συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας που εκφράζουν τις αβέβαιες παραμέτρους, όπου εδώ είναι οι **συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων**. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την τεχνική Monte Carlo γίνεται δειγματοληψία για τους συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων και παράγεται το Pareto front με την μέθοδο **Augmecon** (Manrotas, 2009), όπως περιγράφεται σε επόμενη παράγραφο. Αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε όχι ένα αλλά πολλά μέτωπα Pareto. Το διάγραμμα ροής της διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας

Το πρόβλημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη της τεχνικής Monte Carlo είναι το ακόλουθο:

$$\max c_1^{(i)} x$$

$$\max c_2^{(i)} x$$

...

$$\max c_p^{(i)} x$$

st

$$x \in F$$

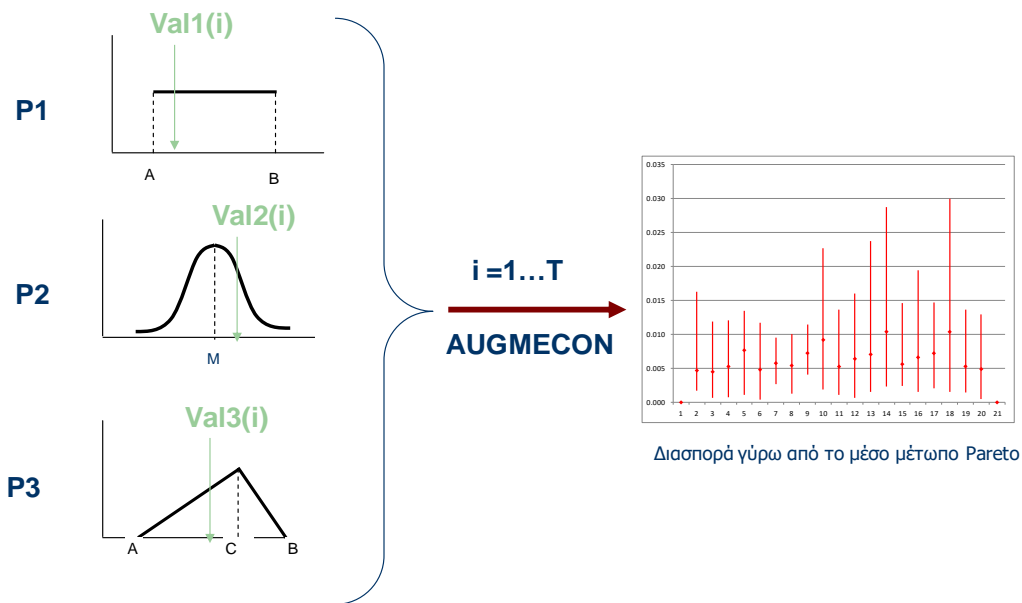
Όπου  $c_p^{(i)}$  είναι ο συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης  $p$  στην  $i$ - επανάληψη Monte Carlo.

Στη συνέχεια από το σύνολο των μετώπων Pareto μπορούμε να υπολογίσουμε ένα «μέσο» μέτωπο Pareto ως το πιο αντιπροσωπευτικό λαμβάνοντας τους μέσους όρους ανά σημείο του μετώπου Pareto. Στη συνέχεια σε κάθε μέτωπο Pareto και για κάθε Pareto βέλτιστη λύση υπολογίζουμε την απόστασή της από την αντίστοιχη Pareto βέλτιστη λύση του αντιπροσωπευτικού μετώπου Pareto. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε τη διασπορά για κάθε Pareto βέλτιστη λύση γύρω από την αντίστοιχη λύση του αντιπροσωπευτικού μετώπου Pareto. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δούμε την ευστάθεια του Pareto front



αναγνωρίζοντας περιοχές με μεγαλύτερη και μικρότερη διασπορά. Η ευστάθεια λοιπόν του μετώπου Pareto εκφράζεται με την διασπορά γύρω από το «αντιπροσωπευτικό μέτωπο Pareto». Σχηματικά η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 2.4.

Είναι χαρακτηριστικό ότι με τη μέθοδο Augmecon μπορούμε να πάρουμε όσο πυκνό πλέγμα θέλουμε για το μέτωπο Pareto ενώ με τη νέα έκδοση της μεθόδου Augmecon (Augmecon 2, Manrotas and Florios, 2013) μπορούμε να παράγουμε το πλήρες μέτωπο Pareto σε προβλήματα Πολυκριτηριακού Ακέραιου Προγραμματισμού.



Σχήμα 2.4: Σχηματική παράσταση της διαδικασίας

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και παρουσιάστηκε στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας Euro 2013 (<http://euro2013.org/>) με τίτλο "Incorporating Energy and Environmental Corporate Responsibility in capital budgeting. A multiobjective approach".

### 2.3 Η μέθοδος ITA

Η μεθοδολογία ITA (Iterative Trichotomic Approach) χρησιμοποιείται στον τομέα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων με δυαδικές μεταβλητές, όπου η αβεβαιότητα αντιμετωπίζεται με προσομοιώσεις Monte Carlo. Έχει εφαρμοστεί σε μονοκριτηριακά προβλήματα, όπου η κάθε επανάληψη Monte Carlo παράγει ένα διαφορετικό βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Παρατηρώντας το σύνολο των παραγόμενων χαρτοφυλακίων, σημειώνουμε τα projects που εμφανίζονται σε όλες τις επαναλήψεις στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο και τα projects που δεν εμφανίζονται ποτέ. Τα πρώτα τα ονομάζονται «πράσινα» (green) και τα δεύτερα «κόκκινα» (red). Αντίθετα, τα projects που εμφανίζονται σε ένα αριθμό επαναλήψεων, αλλά όχι σε όλες, ονομάζονται «γκρι» (grey).

Στη συνέχεια, προσαρμόζεται η παραπάνω μεθοδολογία στο συγκεκριμένο πρόβλημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι πλέον έχουμε δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, και άρα ένα σύνολο βέλτιστων χαρτοφυλακίων που αναπαρίσταται με το Pareto front. Συνεπώς, όσον αφορά τη μέθοδο ITA, τη θέση των projects λαμβάνουν τα χαρτοφυλάκια και τη θέση των χαρτοφυλακίων τα Pareto fronts. Ύστερα, τα χαρτοφυλάκια χωρίζονται σε «πράσινα», «κόκκινα» και «γκρι», ανάλογα με τη συχνότητα εμφάνισής τους στα παραγόμενα Pareto fronts. Αυτά είναι 100 στον αριθμό, εφόσον αποφασίσαμε να διεξάγουμε 100 επαναλήψεις Monte Carlo. Μπορεί επίσης να τεθεί ένα κατώφλι, σύμφωνα με το οποίο ένα χαρτοφυλάκιο θα θεωρείται «πράσινο» και «κόκκινο» αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να θεωρηθεί ένα χαρτοφυλάκιο «πράσινο», εάν αυτό εμφανίζεται σε πάνω από 98% των Pareto fronts, ενώ αντίστοιχα «κόκκινο» εάν εμφανίζεται σε κάτω από το 2%.

Λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει η διαχείριση των «γκρι» χαρτοφυλακίων, υλοποιείται η εξής τεχνική: Το πρόβλημα βελτιστοποίησης λύνεται 6 φορές, μεταβάλλοντας κάθε φορά τη διακύμανση των μεταβλητών εισόδου κατά 1%, ξεκινώντας από  $\sigma=5\%$  της μέσης τιμής και καταλήγοντας σε  $\sigma=0\%$ . Η περίπτωση  $\sigma=0\%$  αναπαριστά φυσικά την περίπτωση απουσίας αβεβαιότητας, όπου τα χαρτοφυλάκια κατηγοριοποιούνται αναγκαστικά είτε ως «πράσινα» είτε ως «κόκκινα». Με την παραπάνω τεχνική, το σύνολο των «γκρι» χαρτοφυλακίων εξαλείφεται σταδιακά, έχοντας παράλληλα πληροφόρηση σχετικά με το βήμα στο οποίο ένα χαρτοφυλάκιο από «γκρι» γίνεται «πράσινο» ή «κόκκινο» αντίστοιχα.

Επομένως, η μέθοδος ITA αποτελεί μία αποτελεσματική μεθοδολογία ανάλυσης ευαισθησίας του Pareto front και συνεπώς υποστήριξης αποφάσεων επιλογής χαρτοφυλακίων υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Εφόσον σχεδιαστεί η γραφική παράσταση που απεικονίζει το ποσοστό των «πράσινων» χαρτοφυλακίων σε συνάρτηση με το εκάστοτε βήμα μεταβολής της τυπικής απόκλισης και μέσω του υπολογισμού του εμβαδού της γραφικής παράστασης, θα προκύψει ένα μέτρο της ευστάθειας του Pareto front.

## 2.4 Η Πολυστοχική μέθοδος AUGMECON

Η μέθοδος augmented  $\epsilon$ -constraint (AUGMECON) είναι μία τεχνική πολυκριτήριας βελτιστοποίησης και εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα με μεικτές-ακέραιες μεταβλητές. Παρέχει τη δυνατότητα αναλυτικής αντιμετώπισης προβλημάτων πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων, ενώ ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται οδηγεί σε γρήγορο εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Στη γενική περίπτωση όπου έχουμε  $n$  στον αριθμό αντικειμενικές συναρτήσεις, βελτιστοποιείται μία από αυτές και οι υπόλοιπες μετατρέπονται σε περιορισμούς. Η διεύθυνση των ανισοτικών περιορισμών εξαρτάται από το αν η αντίστοιχη αντικειμενική συνάρτηση είχε ως στόχο τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποιείται μία από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, ενώ η άλλη μετατρέπεται σε περιορισμό. Πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι οποιαδήποτε από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις και αν επιλεγεί για να μετατραπεί σε περιορισμό, η βέλτιστη λύση που θα προκύψει είναι η ίδια.

Μαθηματικά, τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

- Ένα αρχικό πρόβλημα της μορφής:

$$\max\{f_i(x), i=1,2,\dots,p\} \text{ subject to } x \in S$$

- σύμφωνα με τη μέθοδο  $\epsilon$ -constraint, το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται στο:

$$\max[f_1(x)] \text{ subject to } f_i(x) \geq \epsilon_i, \quad i=2,3,\dots,p, \quad x \in S$$

όπου:

$x$  είναι το διάνυσμα που αναπαριστά τις μεταβλητές απόφασης

$f_i(x)$  είναι οι  $p$  στο πλήθος αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος

$S$  είναι ο εφικτός χώρος λύσεων

Το  $\epsilon_i$  αποτελεί το δεξιό μέλος των ανισώσεων που προέκυψαν. Με συστηματική παραμετρική μεταβολή του σαρώνεται όλο το εύρος των ικανών λύσεων και συνεπώς προκύπτουν οι βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα.

### 3. Ορισμός – περιγραφή του πειράματος

Σε αυτό το κεφάλαιο συνδυάζονται οι πληροφορίες που παρουσιάστηκαν αναλυτικά έως το σημείο αυτό, έτσι ώστε να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος. Στόχος είναι η ανάδειξη του βέλτιστου μίγματος (χαρτοφυλακίου) από ένα σύνολο εταιρειών, τα επενδυτικά προγράμματα των οποίων πρόκειται να χρηματοδοτηθούν.

Συγκεκριμένα, θα μελετηθούν 40 Ευρωπαϊκές επιχειρήσεις, τα αναλυτικά δεδομένα των οποίων παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι. Ο αποφασίζων, δηλαδή ο χρηματοπιστωτικός οργανισμός, καλείται να διαλέξει τα πιο ελκυστικά επενδυτικά προγράμματα έχοντας ως βασικά κριτήρια την περιβαλλοντική βιωσιμότητα και οικονομική αποδοτικότητα του κάθε προγράμματος. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι περιορισμοί που παρουσιάζονται στο πρόβλημα, οι οποίοι μπορεί να είναι πολύπλοκοι, ανάλογα με τη συγκεκριμένη πολιτική στην οποία ανταποκρίνονται. Σαν αποτέλεσμα των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων και της πληθώρας των περιορισμών, το πρόβλημα απαιτεί αναλυτική αντιμετώπιση μέσω της λύσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Όπως κατέστη σαφές στη μελέτη της βιβλιογραφίας, πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να υποστηρίξουν τις παραπάνω αποφάσεις. Κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούνται μοντέλα ακεραίου προγραμματισμού, όπου η δυαδική μεταβλητή απόφασης  $b_i$  μπορεί να αναφέρεται σε ένα από τα κάτωθι συμπληρωματικά ενδεχόμενα:

- $b_i = 1$  ➡ Το επενδυτικό πρόγραμμα  $i$  επιλέγεται για χρηματοδότηση
- $b_i = 0$  ➡ Το επενδυτικό πρόγραμμα  $i$  δεν επιλέγεται για χρηματοδότηση

#### 3.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για τη λύση του προβλήματος στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι σαράντα εταιρίες, τα ενεργειακά έργα των οποίων αξιολογούνται, χωρίζονται σε συγκεκριμένες κατηγορίες.

Ως προς τη γεωγραφική περιοχή έχουμε:

- 11 νοτιοευρωπαϊκές επιχειρήσεις (South Europe)
  - 10 βορειοευρωπαϊκές επιχειρήσεις (North Europe)
  - 13 κεντροευρωπαϊκές επιχειρήσεις (Central Europe)
  - 6 ελληνικές επιχειρήσεις (Ελλάδα)
- } 4 γεωγραφικές περιοχές

Ως προς τον τομέα δραστηριοποίησης έχουμε:

- 11 Ενεργειακές επιχειρήσεις
  - 9 Βιομηχανικές επιχειρήσεις
  - 7 επιχειρήσεις Ηλεκτρολογικού Εξοπλισμού
  - 13 επιχειρήσεις Λιανικών Πωλήσεων/Άλλης Κατηγορίας
- } 4 τομείς

### 3.1.1 Τυποποίηση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων

Όπως αναφέρθηκε, οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι 2 και έχουν την εξής μορφή:

$$\max Z1 = \sum_{i=1}^n EECR(i) * b(i)$$

$$\max Z2 = \sum_{i=1}^n NPV(i) * b(i)$$

Οι συμβολισμοί της παραπάνω εξίσωσης είναι:

- n: ο συνολικός αριθμός των επιχειρήσεων που αιτούνται για δάνειο
- EECR: η τιμή της περιβαλλοντικής ΕΚΕ κάθε επιχείρησης
- NPV: η τιμή της καθαρής παρούσας αξίας κάθε επένδυσης
- b(i): δυαδική μεταβλητή (0 ή 1) που καθορίζει ποια έργα περιλαμβάνονται στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Επισημαίνεται ότι ο δείκτης EECR κάθε επιχείρησης λαμβάνει τιμές (%), διότι αναφέρεται σε ποσοστιαίες μεταβολές από έτος σε έτος. Το μέγεθος του χρηματικού ποσού που το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα προτίθεται να διαθέσει για δάνεια (AVB) είναι 3.000.000 €.

### 3.1.2 Τυποποίηση των περιορισμών

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται γραφικά τα τέσσερα διαφορετικά είδη περιορισμών που θα χρησιμοποιηθούν. Στη συνέχεια, κάθε είδος περιορισμού μοντελοποιείται κατάλληλα και παρουσιάζεται στις επιμέρους τέσσερις υποπαραγράφους. Το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα επιβάλλει τους περιορισμούς έτσι ώστε να υλοποιήσει διάφορες πολιτικές, όπως για παράδειγμα την εξασφάλιση ότι συγκεκριμένες περιοχές και τομείς θα λάβουν τουλάχιστον ένα ελάχιστο ποσό δανείου.

Πιο συγκεκριμένα, οι παράμετροι των περιορισμών επιλέγονται ως εξής:

- $N\_high=0,5 * TOTPROJ$ ,  
όπου TOTPROJ είναι ο συνολικός αριθμός των επιχειρήσεων που θα δανειοδοτηθούν. Το N\_high αναφέρεται τόσο στους γεωγραφικούς όσο και στους τομεακούς περιορισμούς.
- Αντίθετα, επιλέγουμε να μην φράξουμε τους περιορισμούς όσον αφορά τα κάτω όρια, συνεπώς θα ισχύει  $N\_low=0$  για όλες τις περιπτώσεις.
- Τέλος, επιλέγεται  $AVB(s)=AVB(g)=0,1 * TOTBUDG$ ,

όπου TOTBUDG είναι το σύνολο των χρημάτων που τελικά θα διατεθούν από πλευράς του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος. Όπως διαπιστώνεται από τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, ο αριθμός αυτός είναι πολύ κοντά στην τιμή του AVB, δηλαδή στο μέγιστο ποσό που το ίδρυμα είχε σκοπό να διαθέσει.



Σχήμα 3.1: Είδη Περιορισμών

### Περιορισμός Προϋπολογισμού

Ο σημαντικότερος παράγοντας που δεσμεύει τη διαδικασία χορήγησης δανείου είναι το περιορισμένο προς διάθεση κεφάλαιο από πλευράς του χρηματοπιστωτικού οργανισμού. Ο οργανισμός έχει αποφασίσει να διαθέσει ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο για δάνεια και το άθροισμα των δανείων που αιτούνται οι επιχειρήσεις δεν μπορεί να ξεπερνάει το ποσό αυτό. Μαθηματικά αυτό διατυπώνεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n Budget(i) * b(i) \leq AVB$$

Όπου:

- Budget είναι το ύψος του δανείου που αιτείται κάθε επιχείρηση
- AVB (available budget) είναι το συνολικό κεφάλαιο που έχει αποφασίσει η τράπεζα να διαθέσει για δάνεια.

Επίσης, μπορούν να τεθούν επιπλέον περιορισμοί προϋπολογισμού για τους τομείς και τις γεωγραφικές περιοχές των επιχειρήσεων. Αυτού του είδους οι περιορισμοί θα έχουν τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^n Budget(i) * b(i) \geq AVB(s)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{Budget}(i) * b(i) \geq AVB(g)$$

Η πρώτη ανίσωση αφορά τους τομείς, εφόσον ο δείκτης  $s$  αναπαριστά τους τομείς στους οποίους χωρίζονται οι επιχειρήσεις. Η δεύτερη εξίσωση αντίστοιχα αναφέρεται στους γεωγραφικούς περιορισμούς προϋπολογισμού, κάτι που ορίζεται μέσω του δείκτη  $g$ . Με αυτό τον τρόπο, και σύμφωνα με τη φορά των δύο παραπάνω ανισώσεων, εξασφαλίζεται ότι κάθε γεωγραφική περιοχή και τομέας θα λάβουν τουλάχιστον ένα ελάχιστο ποσό δανείου.

### Περιορισμός Συνολικού Αριθμού Επιχειρήσεων

Ανάλογα με την πολιτική της εκάστοτε τράπεζας, τίθενται περιορισμοί ως προς τον συνολικό αριθμό των επιχειρήσεων που θα δανειοδοτηθούν. Η επιβολή του κάτω ορίου έχει ιδιαίτερη σημασία και στοχεύει να εξαλείψει φαινόμενα όπου το διατιθέμενο κεφάλαιο της τράπεζας καρπώνονται μόνο λίγες μεγάλες επιχειρήσεις, αποκλείοντας με αυτό τον τρόπο τις μικρότερες, που αναπόφευκτα είναι λιγότερο αποδοτικές. Παράλληλα, τίθενται και άνω όρια έτσι ώστε το κεφάλαιο να μην διασκορπιστεί σε πάρα πολλές επιχειρήσεις, κάτι που θα αποφέρει αρκετές διαδικαστικές δυσκολίες. Έχουμε λοιπόν την ανίσωση:

$$N_{low} \leq \sum_{i=1}^n b(i) \leq N_{high}$$

Όπου

- $N_{low}$  είναι ο ελάχιστος αριθμός επιχειρήσεων που επιθυμούμε να δανειοδοτηθούν
- $N_{high}$  είναι ο μέγιστος αριθμός επιχειρήσεων που επιθυμούμε να δανειοδοτηθούν

### Τομεακοί Περιορισμοί (sectorial constraints)

Οι επιχειρήσεις που θα μελετηθούν ανήκουν στους εξής κλάδους: Ενέργεια, Βιομηχανία, Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός, Λιανικές Πωλήσεις – Άλλο. Ανάλογα με την πολιτική που ακολουθούμε, ορίζονται περιορισμοί χρηματοδότησης ανά κλάδο. Αυτό μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$N_{low}(s) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(i \in S) * b(i) \leq N_{high}(s)$$

Όπου

- $N_{low}(s)$  είναι ο ελάχιστος αριθμός επιχειρήσεων για κάθε τομέα
- $N_{high}(s)$  είναι ο μέγιστος αριθμός επιχειρήσεων για κάθε τομέα
- $s$  είναι ο κάθε τομέας στον οποίο χωρίζονται οι επιχειρήσεις

Εφόσον έχουμε 4 τομείς δραστηριοποίησης, θα προκύψουν 4 ανισώσεις αυτού του είδους, καθεμία για κάθε τομέα δραστηριοποίησης.

### Γεωγραφικοί περιορισμοί (geographical constraints)

Οι 40 επιχειρήσεις που θα μελετήσουμε στη συνέχεια διαχωρίζονται επίσης ως προς την τοποθεσία τους. Οι επιχειρήσεις αυτές, που είναι Ελληνικές και Ευρωπαϊκές, χωρίζονται στις

εξής περιοχές: Αττική, South Europe, Central Europe, North Europe. Μπορούμε να ενσωματώσουμε γεωγραφικούς περιορισμούς στο πρόβλημα ως εξής:

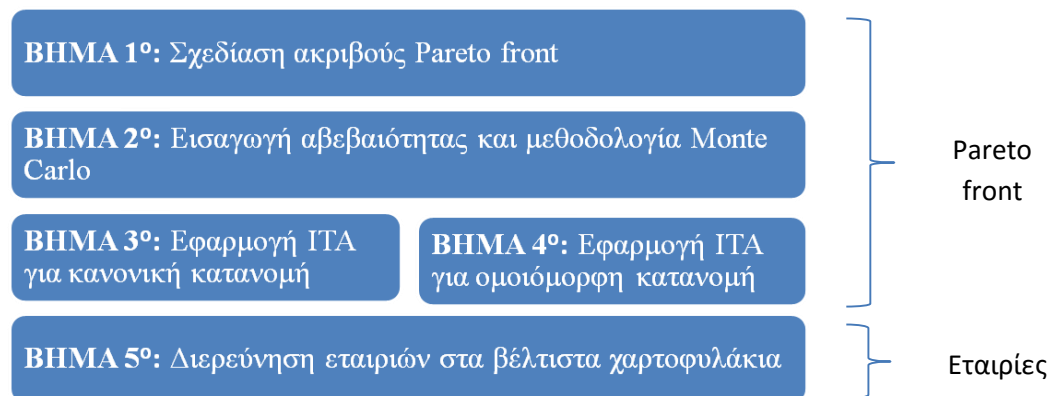
$$N_{low(g)} \leq \sum_{i=1(i \in g)}^n b(i) \leq N_{high(g)}$$

Όπου:

- $N_{low(g)}$  είναι ο ελάχιστος αριθμός επιχειρήσεων για κάθε γεωγραφική περιοχή
- $N_{high(g)}$  είναι ο μέγιστος αριθμός επιχειρήσεων για κάθε γεωγραφική περιοχή
- $g$  είναι η κάθε γεωγραφική περιοχή στην οποία χωρίζονται οι επιχειρήσεις

### 3.2 Τα βήματα της μεθοδολογία ανάλυσης ευστάθειας

Παρουσιάζονται αρχικά σε μορφή σχήματος τα 5 βήματα της μεθόδου και στη συνέχεια αναλύονται ένα προς ένα. Τα 4 αρχικά βήματα σχετίζονται με το Pareto front και την ευστάθειά του, ενώ στο 5<sup>ο</sup> βήμα μελετάμε τις 40 εταιρίες οι οποίες συνθέτουν τα διάφορα χαρτοφυλάκια και συνεπώς τα επιμέρους Pareto fronts.



Σχήμα 3.2: Τα βήματα της μεθόδου

- **Βήμα 1<sup>ο</sup>: Σχεδίαση ακριβούς Pareto front**

Όπως έχει προαναφερθεί, αρχικά επιχειρείται η λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας ως είσοδο τις ακριβείς τιμές των διαθέσιμων δεικτών EECR και NPV. Σκοπός είναι η χρησιμοποίηση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων για το σχεδιασμό του Pareto front. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιείται μία επιπλέον τεχνική. Στη γλώσσα GAMS δίνεται η δυνατότητα λύσης του προβλήματος προσεγγιστικά, άρα και με λιγότερα σημεία σε σχέση με την ακριβή λύση. Η δυνατότητα αυτή παρέχεται για την περίπτωση που ο χρόνος υπολογισμού έχει περισσότερη σημασία από την ακρίβεια, καθώς με τον τρόπο αυτό μειώνεται σημαντικά ο φόρτος των υπολογισμών. Συνεπώς, στο στάδιο αυτό αναπτύσσεται ο αλγόριθμος στη γλώσσα GAMS, εισάγονται τα δεδομένα και λύνεται το πρόβλημα δύο φορές, σύμφωνα με



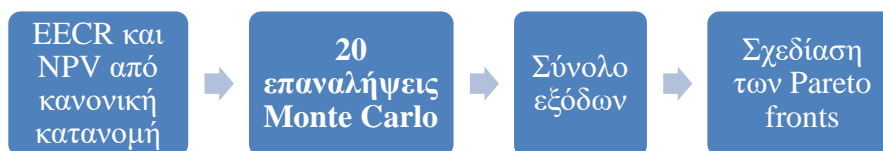
τα παραπάνω. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα χαράσσουμε το ακριβές Pareto front και την προσέγγισή του και γίνονται οι απαραίτητες συγκρίσεις.



Σχήμα 3.3: Βήματα σχεδιασμού ακριβούς Pareto front

- **Βήμα 2°: Εισαγωγή αβεβαιότητας και μεθοδολογία Monte Carlo**

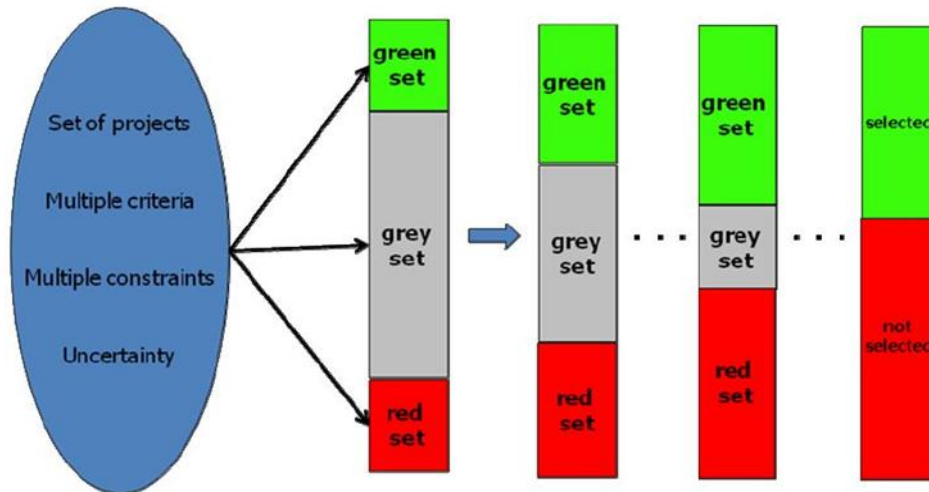
Στη συνέχεια, εισάγεται η έννοια της αβεβαιότητας στους δείκτες EECR και NPV. Γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή, με μέση τιμή τις τιμές που διαθέτουμε από τα δεδομένα και τυπική απόκλιση το 5% των τιμών αυτών. Σκοπός του σταδίου αυτού είναι η σχεδίαση στο ίδιο διάγραμμα 20 διαφορετικών Pareto fronts. Αυτά προκύπτουν με τυχαία δειγματοληψία από τις πιθανοτικές κατανομές των εισόδων, άρα ουσιαστικά με την εφαρμογή προσομοίωσης Monte Carlo 20 φορές. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα που προκύπτουν, θα αποφανθούμε αν η τυχαιότητα των εισόδων προκαλεί σημαντική διακύμανση στις εξόδους.



Σχήμα 3.4: Βήματα Monte Carlo

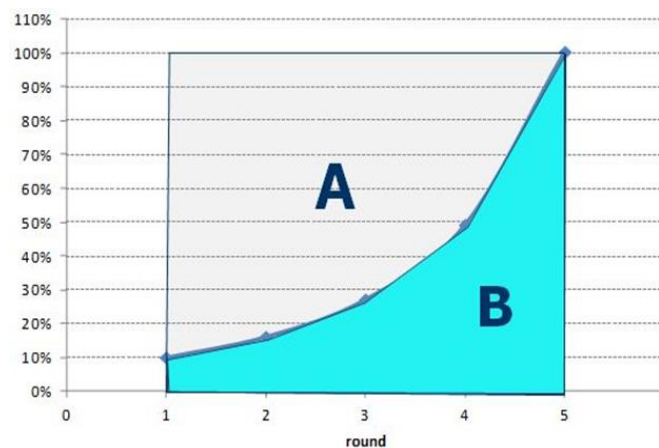
- **Βήμα 3°: Εφαρμογή μεθόδου ITA για κανονική κατανομή**

Επόμενο βήμα αποτελεί η εφαρμογή της μεθόδου ITA. Εκτελούμε αρχικά 100 επαναλήψεις Monte Carlo και χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά κατώφλια, στη μία περίπτωση δηλαδή θεωρείται ένα χαρτοφυλάκιο «πράσινο» εάν αυτό εμφανίζεται σε πάνω από 98% των Pareto fronts, ενώ αντίστοιχα «κόκκινο» εάν εμφανίζεται σε κάτω από το 2%. Όλα τα υπόλοιπα χαρτοφυλάκια θεωρούνται «γκρι». Στην άλλη περίπτωση, τα αντίστοιχα κατώφλια για το χαρακτηρισμό ενός χαρτοφυλακίου είναι 99% και 1%. Όπως έχει προαναφερθεί, η διαδικασία επαναλαμβάνεται άλλες πέντε φορές μεταβάλλοντας κατά 1% κάθε φορά την τυπική απόκλιση της κανονικής κατανομής, έτσι ώστε να εξαλειφθούν σταδιακά τα «γκρι» χαρτοφυλάκια.



Σχήμα 3.5: Απεικόνιση υλοποίησης μεθόδου ITA

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του σταδίου αυτού, υπολογίζεται το Robustness Index (R.I). Ο δείκτης αυτός αναπαριστά την ευστάθεια του Pareto front και όσο μεγαλύτερες τιμές λαμβάνει, τόσο πιο ευσταθές θα είναι το Pareto front. Σχεδιάζεται αρχικά ένα διάγραμμα, όπου ο άξονας-x είναι το εκάστοτε από τα 6 βήματα μεταβολής της τυπικής απόκλισης και ο άξονας-y είναι ο αριθμός των «πράσινων» χαρτοφυλακίων στο βήμα αυτό, εκφρασμένος επί τοις εκατό (%). Το robustness index προκύπτει γεωμετρικά ως ο λόγος των εμβαδών B και A, δηλαδή  $R.I=B/A$ . B είναι το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης και του άξονα-x και A το εμβαδό του ορθογώνιου με βάση την τιμή  $(total\_rounds)-1$  και ύψος το 100%. Total\_rounds είναι ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της μεθόδου που εκτελούνται, δηλαδή 6 στην περίπτωση αυτή. Τα παραπάνω φαίνονται ακριβέστερα στο επόμενο διάγραμμα.



Σχήμα 3.6: Υπολογισμός του Robustness Index



Σχήμα 3.7: Βήματα υπολογισμού Robustness Index

- **Βήμα 4°: Εφαρμογή μεθόδου ΙΤΑ για ομοιόμορφη κατανομή**

Η ίδια διαδικασία εκτελείται άλλη μία φορά, υποθέτοντας αυτή τη φορά ότι οι εισοδοί ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή. Η κατανομή αυτή περιγράφεται από τα όρια  $a$  και  $b$  και επιλέγουμε τα όρια αυτά να μεταβάλλονται σε κάθε βήμα ως εξής: [0.85-1.15], [0.88-1.12], [0.91-1.09], [0.94-1.06], [0.97-1.03], [1-1], επί την ακριβή τιμή κάθε μεταβλητής. Έτσι, θα καταστεί δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων όσον αφορά το R.I ανάμεσα στις δύο κατανομές που χρησιμοποιούνται ως εισοδοί αλλά και ανάμεσα στα δύο σενάρια (98%-2% και 99%-1%).

- **Βήμα 5°: Διερεύνηση εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια**

Έχοντας πραγματοποιήσει εκτενή ανάλυση σχετικά με τα χαρτοφυλάκια και το Pareto front, στο τελευταίο στάδιο της εφαρμογής θα λάβει χώρα μελέτη της συμμετοχής των 40 εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Η ανάλυση γίνεται για την περίπτωση της κανονικής κατανομής και για  $\sigma=5\%$ . Όπως θα φανεί στη συνέχεια, εμφανίζονται συνολικά 398 διαφορετικά βέλτιστα χαρτοφυλάκια στο σύνολο των Pareto fronts. Από τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, θα κατασκευαστεί ένα ιστόγραμμα όπου θα απεικονίζεται η σχετική συχνότητα εμφάνισης της κάθε εταιρίας στο σύνολο των 398 διαφορετικών χαρτοφυλακίων. Με αυτό τον τρόπο θα εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τις εταιρίες οι οποίες τείνουν να εμφανίζονται συχνότερα στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια και για αυτές που δεν εμφανίζονται σχεδόν ποτέ.

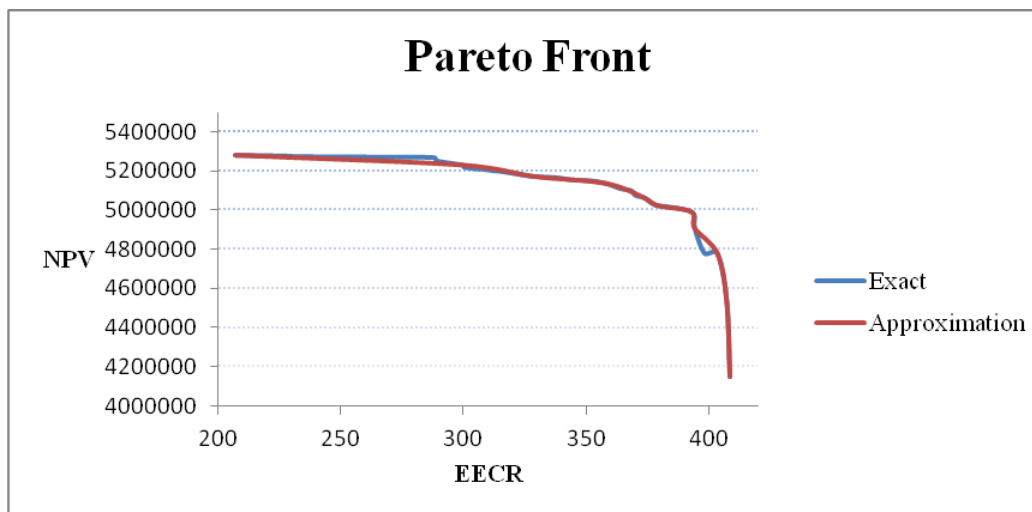
## 4. Επίλυση εφαρμογής και πειραματική αξιολόγηση

Στο Κεφάλαιο αυτό, πραγματοποιείται η επίλυση της πειραματικής εφαρμογής και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας ανάλυσης ευστάθειας. Η επίλυση ακολουθεί τα 5 βήματα που αναπτύχθηκαν και παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Παράλληλα προβάλλονται κάποια συμπεράσματα για τη μεθοδολογία αξιολόγησης της ευστάθειας και την αξιοπιστία της κατά την όλη διαδικασία επίλυσης.

### Βήμα 1ο: Σχεδίαση του Pareto front για τις ακριβείς τιμές των EECR και NPV

Από την εκτέλεση του αλγορίθμου στην πλατφόρμα GAMS προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα, τόσο για την ακριβή λύση όσο και για την προσέγγιση.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, σχεδιάζονται στο ίδιο διάγραμμα τα δύο Pareto fronts όπως εμφανίζονται στο Σχήμα 4.1.



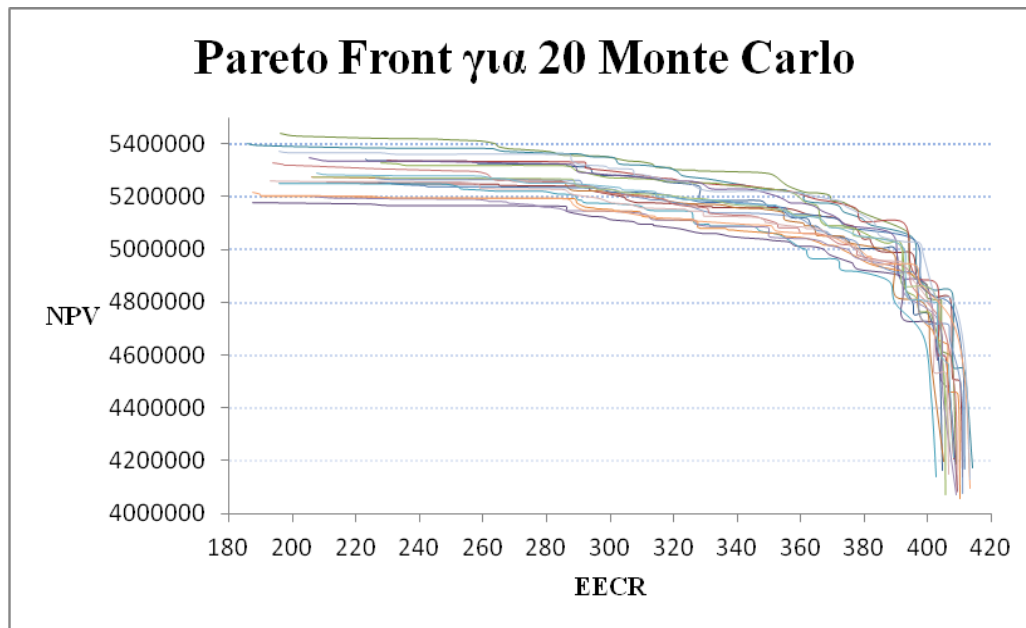
Σχήμα 4.1: Το ακριβές και το προσεγγιζόμενο Pareto front

Η μορφή της καμπύλης είναι κοίλη εφόσον θέλουμε ταυτόχρονη μεγιστοποίηση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων, ενώ παρατηρούμε ότι τα δύο Pareto fronts έχουν πολύ παρόμοια μορφή. Συνεπώς η προσέγγιση κρίνεται ικανοποιητική.

### Βήμα 2<sup>ο</sup>: Pareto fronts για 20 επαναλήψεις Monte Carlo

Από την εκτέλεση της μεθόδου προέκυψαν 20 διαφορετικά Pareto fronts, ένα για κάθε επανάληψη. Στον πίνακα αποτελεσμάτων φαίνονται τα συνολικά EECR και NPV, καθώς και οι δυαδικές μεταβλητές που αντιστοιχούν στη συμμετοχή ή όχι της κάθε εταιρίας στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Στο Παράρτημα II, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενδεικτικά για δύο μόνο από τις 20 επαναλήψεις (για την 1<sup>η</sup> και 15<sup>η</sup> επανάληψη Monte Carlo) και συνεπτυγμένα κατάλληλα.

Τα 20 διαφορετικά Pareto fronts που προέκυψαν σχεδιάζονται στο ίδιο διάγραμμα του Σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2: Pareto fronts για 20 επαναλήψεις Monte Carlo

Παρατηρώντας το παραπάνω διάγραμμα, διαπιστώνεται ότι η τυχαιότητα των εισόδων προκαλεί σημαντική διακύμανση στις εξόδους. Συνεπώς κρίνεται αναγκαία η μελέτη της ευστάθειας του Pareto front. Αυτό επιτυγχάνεται στη συνέχεια μέσω της εφαρμογής της μεθόδου ITA.

### Βήμα 3ο: Εφαρμογή ITA για κανονική κατανομή

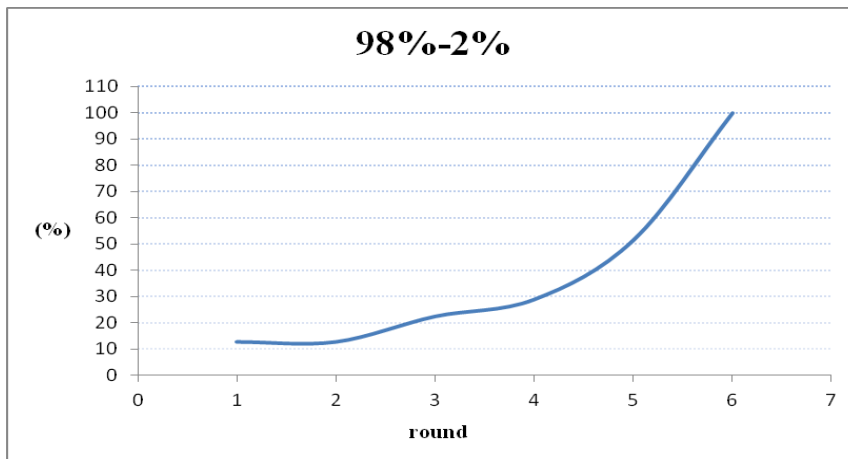
Εκτελώντας τη μέθοδο ITA προκύπτουν πίνακες αποτελεσμάτων παρόμοιοι με αυτούς του προηγούμενου σταδίου, όπου φαίνονται δηλαδή οι δείκτες EECR και NPV, καθώς και η τιμή των 40 δυαδικών μεταβλητών  $b_i$ . Από τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να μετρηθεί ο αριθμός των «πράσινων» και «κόκκινων» χαρτοφυλακίων σε κάθε επανάληψη, και για καθένα από τα δύο σενάρια (98%-2% και 99%-1%). Τα πράσινα και κόκκινα χαρτοφυλάκια που εξήχθησαν, εμφανίζονται στον Πίνακα 4.1.

**Πίνακας 4.1: Διαχωρισμός χαρτοφυλακίων με τη μέθοδο ΙΤΑ-Ομοιόμορφη κατανομή**

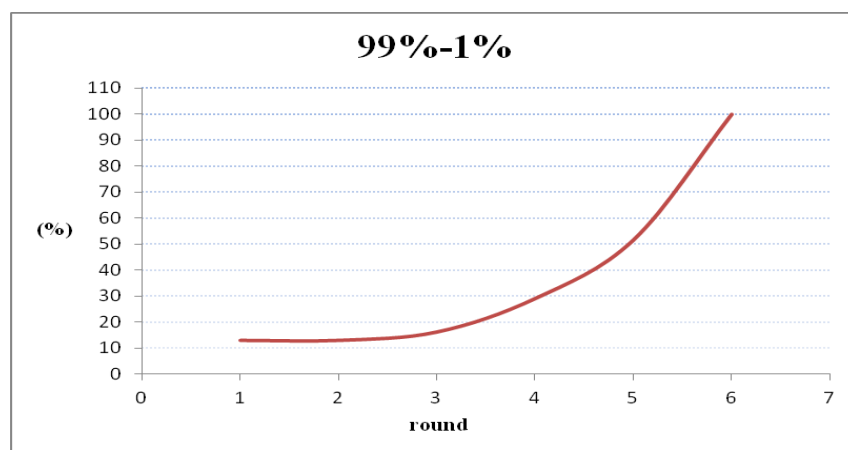
$\sigma=0.5$		$\sigma=0.4$		$\sigma=0.3$		$\sigma=0.2$		$\sigma=0.1$		$\sigma=0$	
98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1
4	4	4	4	7	5	9	9	16	16	31	31
195	141	232	191	271	252	299	287	340	332	367	367

Παρατηρείται ότι ανάμεσα στα σενάρια 98%-2% και 99%-1% υπάρχει μικρή διαφοροποίηση όσον αφορά τον αριθμό των «πράσινων» χαρτοφυλακίων σε κάθε βήμα της μεθόδου. Αντίθετα, η διαφοροποίηση είναι πιο αισθητή όσον αφορά τον αριθμό των «κόκκινων» χαρτοφυλακίων.

Με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, σχεδιάζονται τα παρακάτω διαγράμματα, τα οποία χρησιμεύουν στον υπολογισμό του R.I.



**Σχήμα 4.3: Συχνότητα «πράσινων» χαρτοφυλακίων ανά γύρο της ΙΤΑ (98%-2%)-Κανονική κατανομή**



**Σχήμα 4.4: Συχνότητα «πράσινων» χαρτοφυλακίων ανά γύρο της ΙΤΑ (99%-1%)-Κανονική κατανομή**

Με τη βοήθεια των παραπάνω διαγραμμάτων υπολογίζεται το R.I Αναλυτικά, η σχέση υπολογισμού του R.I είναι:

$$R.I. = \frac{\left\{ \frac{[a(1) + a(2)]}{2} + \frac{[a(2) + a(3)]}{2} + \dots + \frac{[a(n-1) + a(n)]}{2} \right\}}{n-1}$$

όπου n είναι ο αριθμός των γύρων της ITA και α(i) είναι το ποσοστό των «πράσινων» χαρτοφυλακίων σε κάθε γύρο. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό εμβαδό υπολογίζεται μέσω των εμβαδών των επιμέρους τραπεζίων που περικλείονται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα-x.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει για το κάθε σενάριο:

- Σενάριο 98%-2%: R.I=0.345161
- Σενάριο 99%-1%: R.I=0.332258

Στην πρώτη περίπτωση (98%-2%) το R.I είναι μεγαλύτερο και αυτό είναι διαισθητικά σωστό, διότι στενεύοντας τα όρια του κατωφλίου, λιγότερα χαρτοφυλάκια χαρακτηρίζονται πλέον ως «πράσινα». Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μειώνεται το εμβαδό B (εμβαδό μεταξύ της καμπύλης και του άξονα-x), άρα και το R.I.

#### Βήμα 4ο: Εφαρμογή ITA για ομοιόμορφη κατανομή

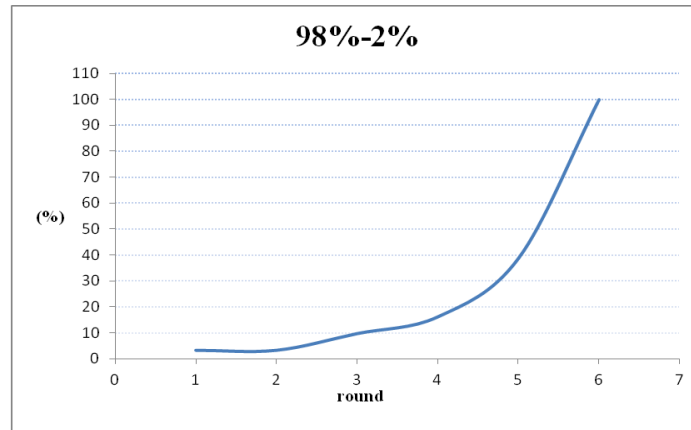
Αντίστοιχα με προηγούμενως, εκτελούνται τα βήματα της μεθόδου ITA χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη κατανομή. Παρουσιάζεται στη συνέχεια στον Πίνακα 2 ο αριθμός των «πράσινων» και «κόκκινων» χαρτοφυλακίων, όπως προέκυψαν σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.2: Διαχωρισμός χαρτοφυλακίων με τη μέθοδο ITA-Ομοιόμορφη κατανομή

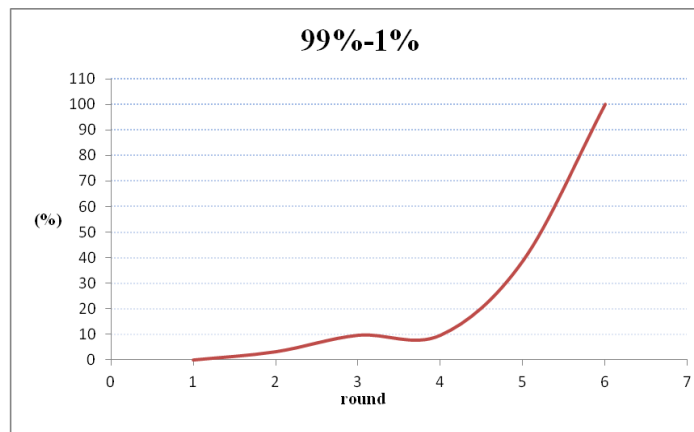
(0.85-1.15)		(0.88-1.12)		(0.91-1.09)		(0.94-1.06)		(0.97-1.03)		(1-1)	
98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1	98-2	99-1
1	0	1	1	3	3	5	3	12	12	31	31
536	409	567	479	619	563	684	667	733	726	783	783

Όπως και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, παρατηρούμε ότι ανάμεσα στα σενάρια 98%-2% και 99%-1% υπάρχει μικρή διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό των «πράσινων» χαρτοφυλακίων, αλλά αισθητή διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό των «κόκκινων».

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα και ο υπολογισμός του R.I, κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση της κανονικής κατανομής.



Σχήμα 4.5: Συχνότητα «πράσινων» χαρτοφυλακίων ανά γύρο της ΙΤΑ (98%-2%)-Ομοιόμορφη κατανομή



Σχήμα 4.6: Συχνότητα «πράσινων» χαρτοφυλακίων ανά γύρο της ΙΤΑ (99%-1%)-Ομοιόμορφη κατανομή

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση υπολογισμού του R.I, προκύπτει για καθένα από τα δύο σενάρια:

- Σενάριο 98%-2%: R.I=0.23871
- Σενάριο 99%-1%: R.I=0.22258

Πάλι παρατηρείται μείωση του R.I στενεύοντας τα όρια του κατωφλίου, δηλαδή μεταβαίνοντας από το σενάριο 98%-2% στο 99%-1%.

### Βήμα 5ο: Διερεύνηση εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια

Έχοντας ολοκληρώσει το σχεδιασμό του Pareto front και την ανάλυση ευαισθησίας του, τελικό στάδιο του πρακτικού τμήματος της εργασίας αποτελεί μία διερεύνηση που αφορά τις 40 εταιρίες που αιτούνται για δάνειο και συνεπώς συμμετέχουν στα διάφορα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Καταγράφεται λοιπόν τη συχνότητα εμφάνισης της κάθε εταιρίας στα 398

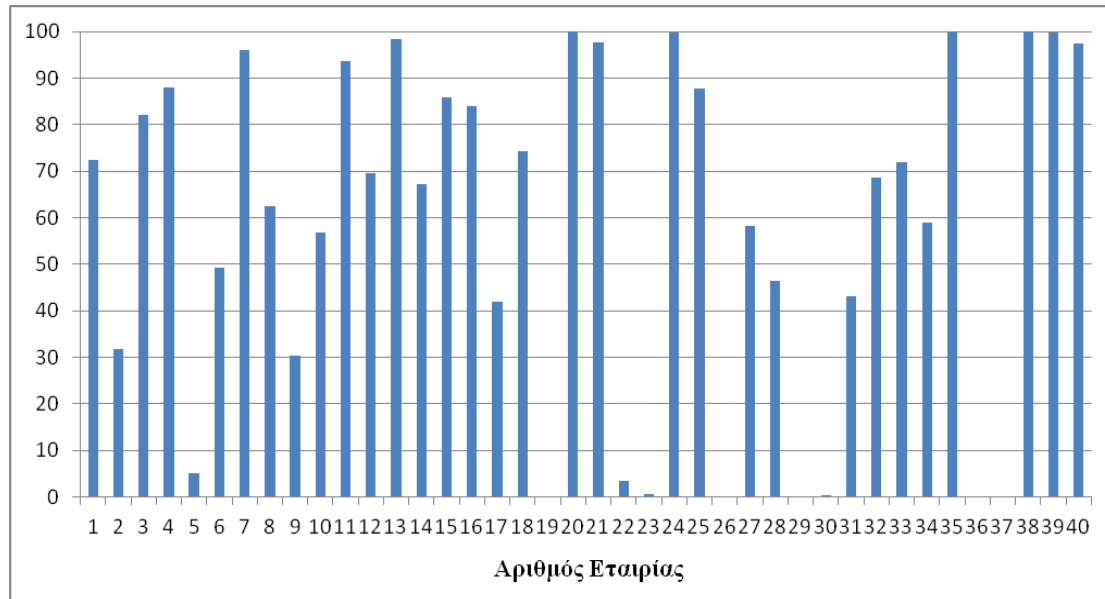


βέλτιστα χαρτοφυλάκια που προκύπτουν και στη συνέχεια διαιρούμε με το 398 έτσι ώστε να προκύψει η σχετική συχνότητα. Αυτά φαίνονται στον Πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3: Συχνότητα εμφάνισης των 40 εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια

Αριθμός Εταιρίας	Απόλυτη Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (%)
1	288	72,36
2	126	31,66
3	327	82,16
4	350	87,94
5	20	5,03
6	196	49,25
7	382	95,98
8	249	62,56
9	121	30,40
10	226	56,78
11	373	93,72
12	277	69,60
13	392	98,49
14	267	67,09
15	342	85,93
16	334	83,92
17	167	41,96
18	296	74,37
19	0	0,00
20	398	100,00
21	389	97,74
22	14	3,52
23	2	0,50
24	397	99,75
25	349	87,69
26	0	0,00
27	232	58,29
28	185	46,48
29	0	0,00
30	1	0,25
31	172	43,22
32	273	68,59
33	286	71,86
34	235	59,05
35	398	100,00
36	0	0,00
37	0	0,00
38	398	100,00
39	397	99,75
40	388	97,49

Τέλος, σχεδιάζεται το κατάλληλο ιστόγραμμα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα. Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται ο αριθμός της καθεμίας από τις 40 εταιρίες που εξετάζουμε, ενώ στον κατακόρυφο άξονα η σχετική συχνότητα εμφάνισής της στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια.



**Σχήμα 4.7:** Ιστόγραμμα σχετικής συχνότητας εμφάνισης κάθε εταιρίας στο σύνολο των χαρτοφυλακίων

Παρατηρώντας το παραπάνω ιστόγραμμα, προκύπτει ότι υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση όσον αφορά τη σχετική συχνότητα εμφάνισης των εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Ορισμένες εταιρίες εμφανίζονται σε όλα τα χαρτοφυλάκια, ενώ άλλες σε κανένα. Αυτό οφείλεται στις τιμές των δεικτών EECR και NPV που χαρακτηρίζουν τις εταιρίες, εφόσον οι δείκτες αυτοί σε ορισμένες εταιρίες λαμβάνουν αρκετά υψηλές τιμές, ενώ σε άλλες αρκετά χαμηλές. Επίσης, η παραπάνω διαφοροποίηση οφείλεται και στους διάφορους περιορισμούς που έχουν εφαρμοστεί.

Παρά το γεγονός ύπαρξης δύο αντικειμενικών συναρτήσεων και άρα Pareto front αντί μοναδικής βέλτιστης λύσης, ενώ παράλληλα έχουμε εκτελέσει προσομοίωση Monte Carlo για αντιμετώπιση της αβεβαιότητας, το παραπάνω ιστόγραμμα αποτελεί οδηγό σχετικά με τις εταιρίες που θα έπρεπε να προτιμηθούν έναντι των υπολοίπων, όταν επιθυμούμε να συνθέσουμε ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο πάνω στο Pareto front. Ανάλυση σχετικά με τα χαρακτηριστικά των εταιριών που τείνουν να επιλέγονται συχνότερα έναντι των υπολοίπων θα ακολουθήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

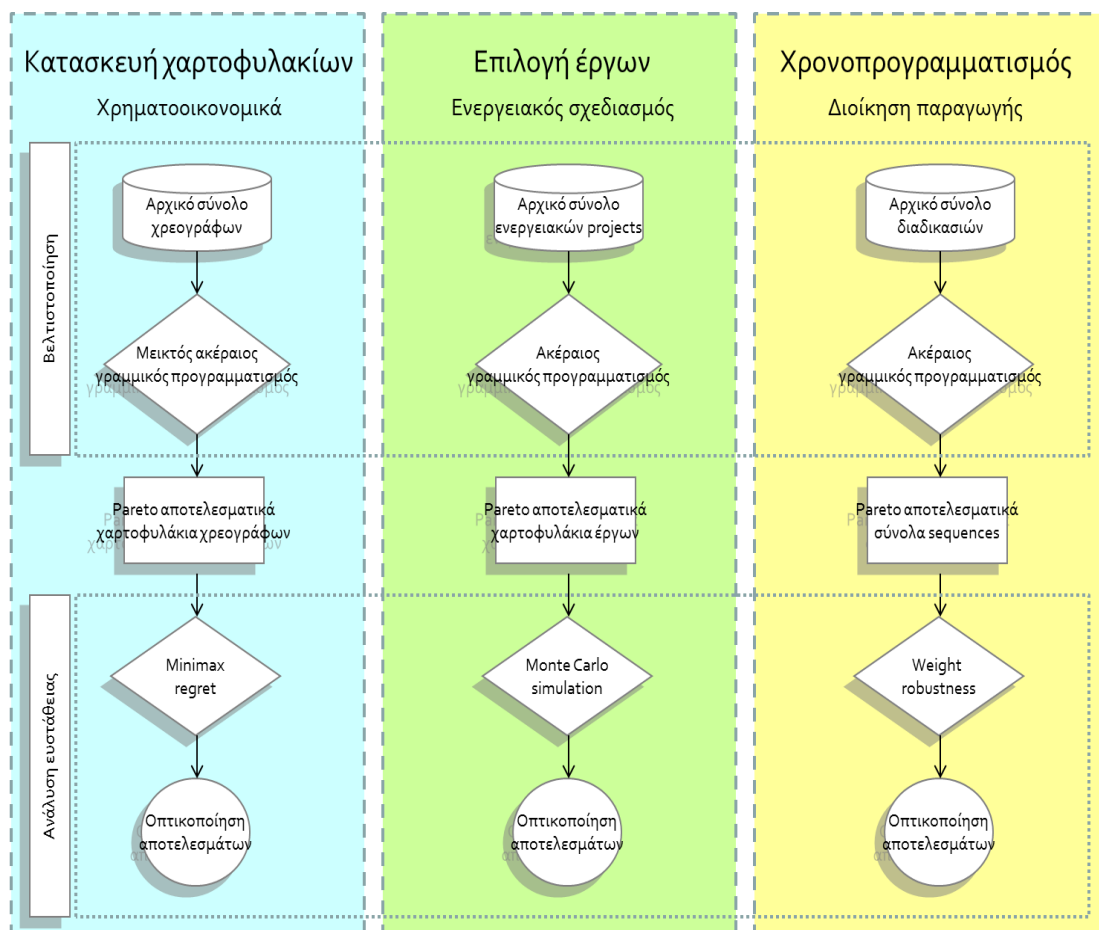
## 5. Συμπεράσματα

Κατά τη διάρκεια της Δράσης Δ.11 τα μέτρα ευστάθειας, που προτάθηκαν στη Δράση Δ.10, αναλύθηκαν και εφαρμόστηκαν σε πειραματικό επίπεδο σε πρόβλημα επιλογής βέλτιστου χαρτοφυλακίου ενεργειακών έργων και παρουσιάστηκαν στο παρόν παραδοτέο. Η όλη διαδικασία περιγράφηκε αναλυτικά στις προηγούμενες παραγράφους και τα εξαγόμενα αποτελέσματα κρίνονται ως ικανοποιητικά. Η αξιολόγηση των ποσοτικών αποτελεσμάτων που εξήχθησαν καθόλη την πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε συνοψίζονται στα παρακάτω σημεία.

- Από την εφαρμογή της προσομοίωσης Monte Carlo διαπιστώθηκε ότι η αβεβαιότητα των εισόδων προκαλεί σημαντική αβεβαιότητα στις εξόδους. Αυτό φάνηκε άλλωστε και από την γραφική παράσταση των Pareto fronts που προέκυψε. Άρα, το μοντέλο παρουσιάζει σημαντική ευαισθησία ως προς την αβεβαιότητα των δεικτών που χρησιμοποιούνται ως εισοδοί. Προκύπτει λοιπόν η αναγκαιότητα συστηματικής αντιμετώπισης της αβεβαιότητας, ή αλλιώς μελέτη ευστάθειας του Pareto front.
- Η ευστάθεια του Pareto front μπορεί να εκτιμηθεί αποτελεσματικά μέσω της μεθόδου ITA. Με τη μέθοδο ITA μελετάμε την ευστάθεια από τη σκοπιά των χαρτοφυλακίων που αποτελούν το κάθε Pareto front. Άμεση σύγκριση των Pareto fronts κατέστη αδύνατη λόγω της ιδιομορφίας που προκαλεί η ύπαρξη ακέραιων μεταβλητών. Η προοπτική ανάπτυξης αυτού του είδους μεθοδολογίας στο μέλλον αναφέρεται στη συνέχεια.
- Το Robustness Index (R.I) θα προκύπτει πάντοτε μικρότερο, όσο «στενεύουμε» τα όρια που χαρακτηρίζουν ένα χαρτοφυλάκιο «πράσινο» ή «κόκκινο». Αυτό θα συμβαίνει ανεξαρτήτως της πιθανοτικής κατανομής που ακολουθούν οι μεταβλητές εισόδου. Στενεύοντας το κατώφλι, λιγότερα χαρτοφυλάκια θα χαρακτηρίζονται πλέον ως «πράσινα» και συνεπώς θα μειώνεται το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα-x, άρα θα μειώνεται το R.I Θα πρέπει λοιπόν να γίνεται κάθε φορά σωστή επιλογή των ορίων του κατωφλίου, ανάλογα με τις πληροφορίες που διαθέτουμε.
- Το R.I εμφανίζεται σαφώς υψηλότερο για την κανονική κατανομή σε σχέση με την ομοιόμορφη, κάτι συμβαίνει φυσιολογικά διότι η ομοιόμορφη κατανομή αναπαριστά μεγαλύτερη αβεβαιότητα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να χαρακτηριστούν λιγότερα χαρτοφυλακίων ως «πράσινα» και συνεπώς έχει άμεση επίδραση στον υπολογισμό του δείκτη R.I
- Διαφοροποίηση του ποσοστού συμμετοχής των εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Υπάρχει μεγάλη διακύμανση ως προς την εμφάνιση των 40 εταιριών στα βέλτιστα χαρτοφυλάκια, με ορισμένες να προτιμώνται σαφώς έναντι των υπολοίπων. Αυτό οφείλεται τόσο στα χαρακτηριστικά των εταιριών, όσο και στους περιορισμούς που έχουμε εφαρμόσει. Εποπτικά, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μεθόδου, μπορούμε να εξαγάγουμε τα εξής συμπεράσματα. Εταιρίες που ζητούν συγκριτικά μεγάλο ποσό δανείου, σε συνδυασμό με χαμηλό δείκτη EECR, τείνουν να μην επιλέγονται. Αντιθέτως, εταιρίες που ζητούν μικρότερα δάνεια και χαρακτηρίζονται από υψηλό NPV, τείνουν να επιλέγονται συχνά.

**Σε επόμενο στάδιο** όλα τα μέτρα αξιολόγησης της ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού, που αναπτύχθηκαν στη Δράση Δ.10 θα εφαρμοστούν σε πραγματικά προβλήματα. Με αυτό τον τρόπο θα εξεταστεί η εφαρμοστικότητα τους και η αποτελεσματικότητά τους σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας με πραγματικά δεδομένα. Τα πραγματικά προβλήματα που θα επιλυθούν εστιάζουν στους τομείς των χρηματοοικονομικών, του ενεργειακού σχεδιασμού (energy planning) και της διοίκησης παραγωγής (production management).

Πιο συγκεκριμένα, θα εξετασθούν τα προβλήματα της κατασκευής χαρτοφυλακίων (portfolio construction), της επιλογής επενδυτικών έργων (project selection) και του χρονοπρογραμματισμού διαδικασιών (production scheduling). Η μεθοδολογία ανάλυσης των προβλημάτων αυτών συνίσταται σε δυο στάδια: α) το στάδιο της βελτιστοποίησης, και β) το στάδιο του ελέγχου της ευστάθειας. Μέσω της πρώτης φάσης παράγεται σύνολο κατά των Pareto άριστων αποτελεσματικών λύσεων, ενώ μέσω της δεύτερης φάσης υλοποιείται ο έλεγχος της ευστάθειας, ο οποίος θα συνοδεύεται από την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων, όπου αυτό είναι εφικτό. Η εφαρμογή των μέτρων αξιολόγησης της ευστάθειας στα τρία παραπάνω πεδία, όπως θα πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της επόμενης Δράσης Δ.12 του έργου, συνοψίζεται στο παρακάτω Σχήμα.



Σχήμα 19: Τα πεδία εφαρμογής των μέτρων αξιολόγησης ευστάθειας

Επισημαίνεται τέλος ότι, τα μέτρα ευστάθειας που κατά περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν, βασίζονται στο κριτήριο *minimax* (κατασκευή χαρτοφυλακίων), στην τεχνική της προσομοίωσης Monte Carlo (ενεργειακός σχεδιασμός) και στην ανάλυση των βαρών των αντικειμενικών συναρτήσεων (χρονοπρογραμματισμός διαδικασιών). Η δε μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων, αφορά σε μοντελοποίηση, είτε ακέραιου (*integer linear programming-ILP*), είτε μεικτού-ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (*mixed integer programming-MILP*).

## Βιβλιογραφία

- Inuiguchi, M. and M. Sakawa (1995). Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function, *European Journal of Operational Research*, 86, 526-536.
- Kazakçi, A.O., S. Rozakis, and D. Vanderpooten (2007). Energy supply in France: a min-max regret approach, *The Journal of the Operational Research Society*, 58 (11), Part Special Issue: Risk Based Methods for Supply Chain Planning and Management, 1470-1479.
- Kouvelis, P. and G. Yu (1997). *Robust Discrete Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Loulou, R. and A. Kanudia (1999). Minimax regret strategies for greenhouse gas abatement: methodology and application, *Operations Research Letters*, 25, 219-230.
- Mausser, H.E. and M. Laguna (1999). Minimising the maximum relative regret for linear programmes with interval objective function coefficients, *Journal of Operational Research Society*, 50, 1063-1070.
- Mavrotas, G. and K. Florios (2013). An improved version of the augmented  $\epsilon$ -constraint method (AUGMECON2) for finding the exact Pareto set in Multi-Objective Integer Programming problems, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (18), 9652-9669.
- Mavrotas, G. and O. Pechak (2013). The trichotomic approach for dealing with uncertainty in project portfolio selection: combining MCDA, mathematical programming and Monte Carlo simulation, *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 3 (1), 79-96.
- Savage, L.J. (1954). *The Foundations of Statistics*, Wiley: New York.
- Steuer, R.E. (1989). *Multiple Criteria Optimization-Theory, Computation and Application*, 2nd edition, Krieger, Malabar FL.
- Vose, D. (1996). *Quantitative Risk Analysis: A guide to Monte Carlo Simulation Modeling*, Wiley.
- Vose, D. (2006). *Risk Analysis: A Quantitative Guide*, 2nd edition, John Willey and sons.
- Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Τα αναλυτικά δεδομένα των σαράντα Ευρωπαϊκών επιχειρήσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

**Πίνακας 4: Τα δεδομένα και χαρακτηριστικά των 40 εταιριών**

Εταιρία	EECR (%)	NPV (€)	Budget (€)	Γεωγραφική Ζώνη	Τομέας δραστηριοποίησης
1	12,97	2549	5926	South Europe	Ενέργεια
2	14,66	49811	50832	South Europe	Ενέργεια
3	9,76	8348	5000	North Europe	Ενέργεια
4	6,23	63608	33857	South Europe	Ενέργεια
5	6,99	244606	191867	Central Europe	Βιομηχανία
6	14,64	36658	37500	Central Europe	Βιομηχανία
7	7,1	14062	6067	Central Europe	Βιομηχανία
8	11,922	22521	23033	Ελλάδα	Βιομηχανία
9	11,81	261305	190000	Central Europe	Βιομηχανία
10	21,59	455047	422667	North Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
11	13,64	696842	415000	Central Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
12	13,59	53894	39333	Central Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
13	3,86	238908	95333	Ελλάδα	Ενέργεια
14	9,62	3372	5633	Central Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
15	40	579	7367	Central Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
16	2,95	74630	37667	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
17	25,872	4860	30100	Ελλάδα	Ενέργεια
18	5,25	12527	5695	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
19	11,388	389914	909314	South Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο

20	11,669	378084	160304	Ελλάδα	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
21	15,387	53099	26190	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
22	17,135	51415	161009	South Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
23	5,759	460075	353422	Central Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
24	8,931	422757	184410	South Europe	Ενέργεια
25	16,120	146937	87913	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
26	12,384	477066	614619	North Europe	Ενέργεια
27	7,193	431582	277042	South Europe	Ενέργεια
28	21,953	208461	158792	South Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
29	4,703	324354	1410180	Central Europe	Βιομηχανία
30	18,066	324069	533645	Central Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
31	7,752	603210	529130	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
32	4,542	648759	396671	Ελλάδα	Βιομηχανία
33	19,183	179554	123640	South Europe	Ενέργεια
34	15,854	220027	149773	Central Europe	Ενέργεια
35	22,006	204350	93049	North Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
36	4,037	352078	311779	South Europe	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
37	19,394	222963	772965	North Europe	Ηλεκτρολογικός Εξοπλισμός
38	17,808	228828	117585	South Europe	Βιομηχανία
39	12,858	428456	190872	Ελλάδα	Λιανικές Πωλήσεις - Άλλο
40	5,849	516117	262033	Central Europe	Βιομηχανία



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Πίνακας 5: Αποτελέσματα προσομοίωσης Monte Carlo-1η επανάληψη

EECR	NPV	Ετ.1	Ετ.2	Ετ.3	Ετ.4	Ετ.5	Ετ...	Ετ.38	Ετ.39	Ετ.40
404,5	4165000	1	1	1	1	0	....	1	1	0
403,51	4558000	1	1	1	1	1	....	1	1	0
400,29	4752000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
395,66	4754000	1	1	1	1	1	....	1	1	1
395,11	4799000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
391	4897000	1	1	1	1	0	....	1	1	0
389,7	5003000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
385,07	5005000	1	1	1	1	1	....	1	1	1
376,65	5007000	1	1	1	0	0	....	1	1	1
374,61	5041000	1	1	1	1	1	....	1	1	1
371,36	5050000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
368,33	5059000	1	1	1	0	0	....	1	1	1
364,96	5088000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
363,27	5089000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
361,78	5119000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
357,15	5121000	1	1	1	1	1	....	1	1	1
354,95	5141000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
351,15	5159000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
349,37	5165000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
347,13	5186000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
328,77	5189000	1	1	1	0	0	....	1	1	1
328	5240000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
317,69	5256000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
314,65	5265000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
305,93	5280000	1	0	1	1	0	....	1	1	1

296,71	5281000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
296,61	5284000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
294,75	5287000	1	0	0	1	0	....	1	1	1
294,17	5293000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
294,04	5297000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
293,48	5311000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
289,87	5314000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
286,44	5317000	1	0	0	1	0	....	1	1	1
285,86	5323000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
282,58	5324000	0	0	1	1	0	....	1	1	1
265,41	5325000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
258,22	5326000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
257,64	5332000	0	0	1	1	0	....	1	1	1
254,21	5335000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
226,78	5336000	1	0	0	1	0	....	1	1	1
223,51	5337000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
222,93	5343000	0	0	1	1	0	....	1	1	1

Πίνακας 6: Αποτελέσματα προσομοίωσης Monte Carlo-15η επανάληψη

EECR	NPV	Ετ.1	Ετ.2	Ετ.3	Ετ.4	Ετ.5	Ετ...	Ετ.38	Ετ.39	Ετ.40
406,8	4236000	1	1	1	1	0	....	1	1	0
404,54	4573000	1	1	1	1	1	....	1	1	0
401,83	4838000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
392,08	4864000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
391,77	4937000	1	1	1	1	0	....	1	1	0
390,17	5027000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
376,56	5054000	1	1	1	0	0	....	1	1	1
376,51	5080000	1	1	1	1	1	....	1	1	1
369,75	5086000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
366,5	5107000	1	1	1	0	0	....	1	1	1

365,36	5122000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
361,03	5130000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
357,97	5131000	0	0	1	1	0	....	1	1	1
355,88	5147000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
349,29	5158000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
347,23	5165000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
338,65	5171000	1	1	1	1	0	....	1	1	1
333,16	5186000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
328,84	5194000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
325,78	5195000	0	0	1	1	0	....	1	1	1
317,66	5207000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
305,07	5217000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
299,75	5229000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
295,86	5230000	1	1	1	0	0	....	1	1	1
294,67	5236000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
291	5238000	1	0	1	0	0	....	1	1	1
288,98	5247000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
287,86	5268000	1	0	1	1	0	....	1	1	1
232	5272000	0	0	1	1	0	....	1	1	1
227,63	5275000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
206,56	5276000	0	0	0	1	0	....	1	1	1
406,8	4236000	1	1	1	1	0	....	1	1	0