ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
«ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΣΗ ΓΝΩΣΕΩΝ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΜΕ ΑΝΑΠΗΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΗΛΙΚΗ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΗ ΖΩΗ.» της πράξης «ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΜΕ ΑΝΑΠΗΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΗΛΙΚΗ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΗ ΖΩΗ »

Δράση Δ2: Προετοιμασία – Παραγωγή Εκπαιδευτικού υλικού

Π.2.1: Εκπαιδευτικό υλικό

Διδάσκων: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Θεματική ενότητα: Ψυχολογικές Προϋποθέσεις για την εργασία ατόμων με αναπηρίες

Θεσσαλονίκη, 2015

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ, ΟΙ ΑΤΥΠΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Η εμφάνιση και ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών ικανοτήτων

Στην ενότητα αυτή, θα πραγματοποιήσουμε μια σύντομη παρουσίαση της εξελικτικής ανάπτυξης των αριθμητικών εννοιών, ξεκινώντας από τους πρώτους μήνες της ζωής του ανθρώπου και φτάνοντας έως τις έννοιες των ρητών αριθμών.

Οι όροι *άτυπα μαθηματικά* και *άτυπες γνώσεις* χρησιμοποιούνται για τις ικανότητες και γνώσεις που αποκτά το παιδί έξω από το σχολείο, αλλά και τις ικανότητες και γνώσεις που αναπτύσσει στο σχολείο χωρίς να τις διδάσκεται. Τα παιδιά, λοιπόν, πριν ακόμη δεχτούν οποιαδήποτε οργανωμένη διδασκαλία στο σχολείο, διαθέτουν πολλές γνώσεις, ικανότητες και δεξιότητες σχετικά με τις αριθμητικές έννοιες, οι οποίες έχουν κυρίως χαρακτήρα κοινωνικό και εμπειρικό. Τις γνώσεις και δεξιότητες αυτές τις αποκτά το παιδί είτε μέσα στο περιβάλλον της οικογένειας είτε γενικότερα από το κοινωνικό και φυσικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ζει (Gelman & Gallistel, 1978; Fuson, 1988; Resnick, 1989; Fischer, 1992; Λεμονίδης, 2003; Sophian, Wood, & Vong, 1995; Butterworth,1999; Nunes, & Bryant, 1996 (στα Ελληνικά, 2007). Στο Λεμονίδης (2003, σελ. 37-56) παρουσιάζονται λεπτομερώς άτυπες αριθμητικές γνώσεις που διαθέτουν οι Έλληνες μαθητές.

Τα άτυπα μαθηματικά, που κατέχουν τα μικρά παιδιά, έχουν μελετηθεί διεξοδικά. Ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι παιδιά από διαφορετικό πολιτισμικό και κοινωνικό-οικονομικό υπόβαθρο προχωρούν με την ίδια αναπτυξιακή πορεία στην πρώιμη και διαισθητική κατανόηση των μαθηματικών (Gelman, 2000; Ginsburg, 1982, 1997; Klein & Starkey, 1988). Χαρακτηριστικά η Gelman (2000, σελ. 27-28) δηλώνει ότι τα διάφορα αποτελέσματα των ερευνών δείχνουν πως υπάρχουν αμετάβλητες αριθμητικές δομές του μυαλού, που συμβάλλουν στην ευρύτερη ανάπτυξη μιας έμμεσης -αλλά με αρχές- κατανόησης των φυσικών αριθμών. Αυτή η κατανόηση επιτρέπει στα άτομα να μετρούν και να παράγουν τις πληθικές τιμές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια δομή, που είναι κάτι σαν πρόσθεση και αφαίρεση. Η Gelman σημειώνει ότι ερχόμαστε στον κόσμο της μάθησης με έναν κατάλληλο αριθμό νοητικών δομών, που αποτελείται από τις αρχές του σκελετού για τη μέτρηση, για την παραγωγή των πληθικών τιμών και για την πρόσθεση και την αφαίρεση των πληθαρίθμων που προκύπτουν.

Πολλές σύγχρονες έρευνες στη γνωστική, συγκριτική και αναπτυξιακή ψυχολογία υποστηρίζουν ότι οι άνθρωποι, αλλά και πολλά είδη ζώων, γεννιούνται με ένα σύνολο έμφυτων και βασικών ποσοτικών δεξιοτήτων. Όσον αφορά τις ποσότητες, αυτές οι πρωτογενείς ικανότητες συμπεριλαμβάνουν μια έμμεση κατανόηση της πληθικότητας, της διατακτικότητας, της καταμέτρησης και της πρόσθεσης και αφαίρεσης (αύξηση και μείωση της ποσότητας μικρών συνόλων) (Boysen, Berntson, 1989; Geary, 1995 ; Butterworth, 2005).

Στοιχεία από τη θεωρία του Piaget για τον αριθμό

Προτού αναφερθούμε στα πειράματα και τη θεώρηση που κάνει ο Piaget για τον αριθμό, θα πρέπει να δούμε τη θεωρία του για τον αριθμό μέσα στα πλαίσια του διαχωρισμού που κάνει για τα τρία είδη γνώσεων: τις *φυσικές γνώσεις*, τις *λογικομαθηματικές* και τις *κοινωνικές* (συμβατικές). Κάνει αυτό το διαχωρισμό των γνώσεων με βάση την προέλευσή τους και τον τρόπο δόμησής τους. Για τον Piaget ο αριθμός είναι ένα παράδειγμα λογικομαθηματικής γνώσης που τον αντιδιαστέλλει, όπως θα δούμε παρακάτω, με τη φυσική γνώση και την κοινωνική (συμβατική) γνώση.

Ο Piaget διαχωρίζει την εξωτερική και εσωτερική προέλευση των γνώσεων. Η προέλευση της φυσικής και κοινωνικής γνώσης είναι κατά ένα μέρος εξωτερική ως προς το υποκείμενο. Αντίθετα, η προέλευση της λογικομαθηματικής γνώσης είναι εσωτερική.

Η λογικομαθηματική γνώση αποτελείται από τις σχέσεις που κατασκευάζονται από κάθε υποκείμενο. Όταν για παράδειγμα μας παρουσιάζουν μια χάντρα μπλε και μια χάντρα κόκκινη και σκεπτόμαστε ότι είναι διαφορετικές, αυτή η σκέψη για τη διαφορά είναι ένα παράδειγμα της θεμελίωσης της λογικομαθηματικής σκέψης. (Οι χάντρες είναι παρατηρήσιμες αλλά η διαφορά που υπάρχει μεταξύ τους δεν είναι.) Αυτή η διαφορά είναι μια σχέση που κατασκευάζεται νοητικά από το υποκείμενο που θέτει αυτά τα δυο αντικείμενα σε σύγκριση. Η διαφορά δεν υπάρχει ούτε μέσα στην κόκκινη ούτε στην μπλε χάντρα, και αν κανένας δε σύγκρινε αυτά τα δυο αντικείμενα, δε θα υπήρχε διαφορά.
Παράδειγμα άλλων σχέσεων που το υποκείμενο μπορεί να θέσει μεταξύ των δύο χαντρών είναι, "παρόμοια", "ίδιου βάρους" και "δύο". Η σχέση την οποία θέτει για τα αντικείμενα ένα υποκείμενο είναι προσωπική. Είναι, δηλαδή, εξίσου σωστό το να πει ότι η κόκκινη χάντρα είναι παρόμοια με την μπλε με το να πει ότι είναι διαφορετικές. Για μια οπτική γωνία οι δυο χάντρες είναι παρόμοιες και για μια άλλη οπτική γωνία είναι διαφορετικές.
Εάν το υποκείμενο θέλει να συγκρίνει το βάρος των δυο χαντρών θα πει ότι είναι "ίσες" σε βάρος. Εάν επίσης δει τις χάντρες αριθμητικά θα πει ότι υπάρχουν "δύο". Οι δύο χάντρες μπορεί να παρατηρηθούν, αλλά το γεγονός ότι είναι δύο δεν μπορεί. Ο αριθμός είναι μια σχέση που δημιουργείται νοητικά.

Το παιδί συνεχίζει την κατασκευή της λογικομαθηματικής του γνώσης συντονίζοντας τις απλές σχέσεις που έθεσε προηγούμενα μεταξύ των αντικειμένων. Συντονίζοντας για παράδειγμα τις σχέσεις "ίδιο", "διαφορετικό" και "περισσότερο", γίνεται ικανό να συμπεράνει ότι υπάρχουν περισσότερες χάντρες στον κόσμο από τις μπλε χάντρες και ότι υπάρχουν περισσότερα ζώα από τα σκυλιά.

Η φυσική γνώση είναι μια γνώση των αντικειμένων μέσα στην εξωτερική τους πραγματικότητα. Το χρώμα και το βάρος μιας χάντρας είναι παραδείγματα φυσικών ιδιοτήτων που ανήκουν στην πραγματικότητα των αντικειμένων και μπορούν να γίνονται γνωστά με την παρατήρηση. 'Ενα άλλο παράδειγμα φυσικής γνώσης είναι το γεγονός ότι γνωρίζουμε πως μια χάντρα θα πέσει αν την πετάξουμε στον αέρα.

Η κοινωνική γνώση έχει ως κύριο χαρακτηριστικό ότι η φύση της είναι εντελώς αυθαίρετη. Η προέλευση των κοινωνικών γνώσεων είναι οι συμβάσεις που τίθενται από τους ανθρώπους. Μπορούμε να αναφέρουμε σαν παράδειγμα κοινωνικής γνώσης ότι ένας πίνακας ονομάζεται "πίνακας", ότι τα Χριστούγεννα γιορτάζονται στις 25 Δεκεμβρίου, ότι δεν πρέπει να τρώμε καθισμένοι πάνω στο τραπέζι.

Είναι εντελώς αυθαίρετο να ονομάζουμε έναν πίνακα "πίνακα". Σε μια άλλη γλώσσα, το ίδιο αντικείμενο έχει ένα άλλο όνομα, διότι δεν υπάρχει καμιά σχέση φυσική ή λογική μεταξύ ενός αντικειμένου και του ονόματός του. Επίσης το γεγονός ότι μερικά άτομα γιορτάζουν τα Χριστούγεννα ενώ άλλα δεν το κάνουν δείχνει το συμβατικό χαρακτήρα της κοινωνικής γνώσης. Δεν υπάρχει καμία φυσική ή λογική αιτία για να θεωρούμε τις 25 Δεκεμβρίου σαν μια μέρα διαφορετική από τις άλλες.

Μπορούμε να συναγάγουμε από τα παραπάνω ότι η παρέμβαση των ανθρώπων είναι απαραίτητη για την απόκτηση των κοινωνικών γνώσεων από τα παιδιά, αυτό δε σημαίνει όμως ότι η παρέμβαση των άλλων είναι το μόνο που έχει ανάγκη το παιδί για να αποκτήσει την κοινωνική γνώση. Η κοινωνική γνώση όπως και η φυσική γνώση είναι μια γνώση του περιεχομένου και για να αφομοιωθεί και να οργανωθεί απαιτεί ένα λογικομαθηματικό πλαίσιο. 'Ετσι όπως το παιδί για να αναγνωρίσει μια κόκκινη χάντρα (φυσική γνώση) έχει ανάγκη από ένα λογικομαθηματικό πλαίσιο, έχει επίσης ανάγκη από αυτό το λογικομαθηματικό πλαίσιο για να αναγνωρίσει μια βρισιά (κοινωνική γνώση) σαν τέτοια. Για να αναγνωρίσει μια βρισιά, το παιδί θα πρέπει να μπορεί να θέτει διαχωρισμούς μεταξύ της λέξης που είναι βρισιά και των λέξεων που είναι σωστές και γενικά να διαχωρίζει τις λέξεις μεταξύ τους.

Η Πιαζετιανή θεωρία του αριθμού βρίσκεται σε αντίθεση με τη διαδεδομένη υπόθεση σύμφωνα με την οποία οι έννοιες του αριθμού μπορούν να διδαχθούν με την κοινωνική μεταφορά όπως η κοινωνική γνώση και ειδικότερα μαθαίνοντας τους μαθητές να μετρούν. Για τον Piaget αυτοί που πιστεύουν ότι οι έννοιες του αριθμού πρέπει να διδάσκονται με την κοινωνική μεταφορά δε φθάνουν στο σημείο να διακρίνουν την ουσιώδη διαφορά που υπάρχει μεταξύ λογικομαθηματικής γνώσης και κοινωνικής γνώσης. Στην περίπτωση της λογικομαθηματικής γνώσης η πρώτη προέλευση της γνώσης είναι το ίδιο το παιδί. Οι λέξεις "ένα, δύο, τρία,.." είναι παραδείγματα κοινωνικής γνώσης. Κάθε γλώσσα διαθέτει ένα διαφορετικό σύνολο λέξεων για να μετράει. Αλλά η θεμελιώδης ιδέα του αριθμού ανήκει στη λογικομαθηματική γνώση η οποία είναι παγκόσμια.
Η θεώρηση, λοιπόν, του Piaget βρίσκεται σε αντίθεση με τις αντιλήψεις που υποστηρίζουν ότι υπάρχει ένας "κόσμος των αριθμών" μέσα στον οποίο θα πρέπει να εισαχθεί κοινωνικά κάθε παιδί.

Κατασκευή με απλή αφαίρεση ή με διαλογιστική αφαίρεση

Η οπτική γωνία του Piaget σχετικά με τη λογικομαθηματική φύση του αριθμού είναι εντελώς αντίθετη με την αντίληψη που υποστηρίζει ότι οι μαθητές μαθαίνουν τις έννοιες του αριθμού κάνοντας αφαίρεση των ιδιοτήτων του αριθμού από διαφορετικά σύνολα, όπως γίνεται για το χρώμα και άλλες φυσικές ιδιότητες των αντικειμένων.
Όπως για παράδειγμα, αν παρουσιάσουμε στα παιδιά σύνολα με τρία λουλούδια, τρία ζώα, τρία παιχνίδια και τέσσερα λουλούδια και τους ζητήσουμε να βρούνε τα σύνολα τα οποία έχουν την ίδια ιδιότητα του αριθμού.

Για τον Piaget η αφαίρεση που οδηγεί στο χρώμα των αντικειμένων είναι μιας άλλης φύσης από την αφαίρεση που οδηγεί στον αριθμό. Χρησιμοποιεί επίσης και διαφορετικούς όρους για να εκφράσει αυτούς τους δυο διαφορετικούς τύπους αφαίρεσης. Έτσι χρησιμοποιεί τον όρο **"απλή ή εμπειρική αφαίρεση"** για την αφαίρεση που αναφέρεται στις ιδιότητες των αντικειμένων και **"διαλογιστική αφαίρεση"** για την αφαίρεση που αναφέρεται στον αριθμό.
Στην απλή αφαίρεση το μόνο που κάνει ο μαθητής είναι ότι προσέχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα του αντικειμένου και αγνοεί τις άλλες. 'Ετσι για παράδειγμα

όταν το παιδί κάνει την αφαίρεση που οδηγεί στο χρώμα ενός αντικειμένου, δεν παίρνει υπόψη του τις άλλες ιδιότητες του αντικειμένου όπως το σχήμα, το βάρος του ή το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο.
Η διαλογιστική αφαίρεση, αντίθετα, περιλαμβάνει την κατασκευή των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων. Αυτές οι σχέσεις, όπως είδαμε και προηγουμένως, δεν είναι υπαρκτές στην εξωτερική πραγματικότητα αλλά διαμορφώνονται από τον άνθρωπο που τις δημιουργεί μεταξύ των αντικειμένων.

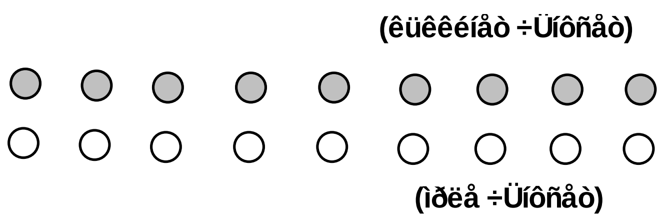
Ο Piaget υποστηρίζει επίσης, ότι αυτοί οι δύο τύποι αφαιρέσεων, για το παιδί, δεν μπορούν να υπάρξουν ο ένας χωρίς τον άλλον. Θα ήταν αδύνατο παραδείγματος χάριν το παιδί να κατασκευάσει τη σχέση του "διαφορετικού", αν δεν μπορούσε να παρατηρήσει τις διαφορετικές ιδιότητες των αντικειμένων. Επίσης, η σχέση "δύο" δε θα μπορούσε να κατασκευαστεί αν το παιδί δε διέκρινε κανένα εξωτερικό στοιχείο που να του επιτρέπει να διαχωρίσει τα δυο αντικείμενα.
Για την πραγματοποίηση της απλής αφαίρεσης είναι απαραίτητο ένα λογικομαθηματικό πλαίσιο που είναι κατασκευασμένο με τη διαλογιστική αφαίρεση, γιατί τα παιδιά δεν μπορούν να αποτυπώνουν αυτόματα τα γεγονότα της εξωτερικής πραγματικότητας, αν καθένα από αυτά μένει ένα απομονωμένο κομμάτι της γνώσης χωρίς καμία οργανωμένη σχέση με την ήδη υπάρχουσα γνώση.
Για να παρατηρήσει το παιδί, για παράδειγμα, ότι μια χάντρα είναι μπλε έχει ανάγκη από ένα σχήμα ταξινόμησης για να διαχωρίσει το μπλε από όλα τα άλλα χρώματα. Έχει ανάγκη επίσης και από ένα άλλο σχήμα για να κάνει το διαχωρισμό μεταξύ της χάντρας και όλων των άλλων αντικειμένων που ήδη γνωρίζει.

Για το παιδί από το αισθησιοκινητικό και το προ-λειτουργικό στάδιο η διαλογιστική αφαίρεση δεν μπορεί να υπάρξει ανεξάρτητη από την απλή αφαίρεση, εμφανίζεται αυτόνομη πιο αργά. Έτσι, για παράδειγμα, από τη στιγμή που το παιδί θα κατασκευάσει την έννοια του αριθμού θα είναι ικανό να χρησιμοποιεί τους αριθμούς και να κάνει αριθμητικές πράξεις με διαλογιστική αφαίρεση.

Η χρησιμοποίηση και ο διαχωρισμός αυτών των δυο αφαιρέσεων γίνεται κατά την περίοδο που το παιδί εισάγεται στις έννοιες του αριθμού και μαθαίνει τους πρώτους μικρούς αριθμούς (μέχρι το 10). Όταν το παιδί περάσει στους μεγάλους αριθμούς είναι φανερό ότι δεν μπορεί να μαθαίνει τους αριθμούς μέχρι το άπειρο, χρησιμοποιώντας σύνολα αντικειμένων, οι αριθμοί μαθαίνονται χρησιμοποιώντας μόνο τις διαλογιστικές αφαιρέσεις.

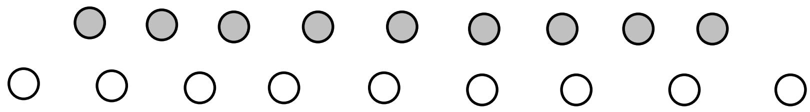
Το πείραμα του Piaget για τη 'διατήρηση του αριθμού'

Σε γενικές γραμμές, το περίφημο πείραμα της διατήρησης του αριθμού συνίσταται στο να θέσουμε το παιδί μπροστά σε δύο συλλογές, για παράδειγμα, όπως οι παρακάτω συλλογές από κόκκινες και μπλε χάντρες:



Σχήμα 3.1

και, αφού το οδηγήσουμε να διαπιστώσει την ισοδυναμία των δύο συλλογών, αραιώνουμε, για παράδειγμα, τις μπλε χάντρες:



Σχήμα 3.2

και ρωτούμε το παιδί, μετά τη μετατροπή, εάν υπάρχει ακόμη ισοδυναμία μεταξύ των δύο συλλογών. Ο Piaget ανακάλυψε ότι τα παιδιά σε μια ηλικία αρκετά προχωρημένη, σχεδόν 6-7 χρόνων, αποτυχαίνουν σ΄αυτό το πείραμα.

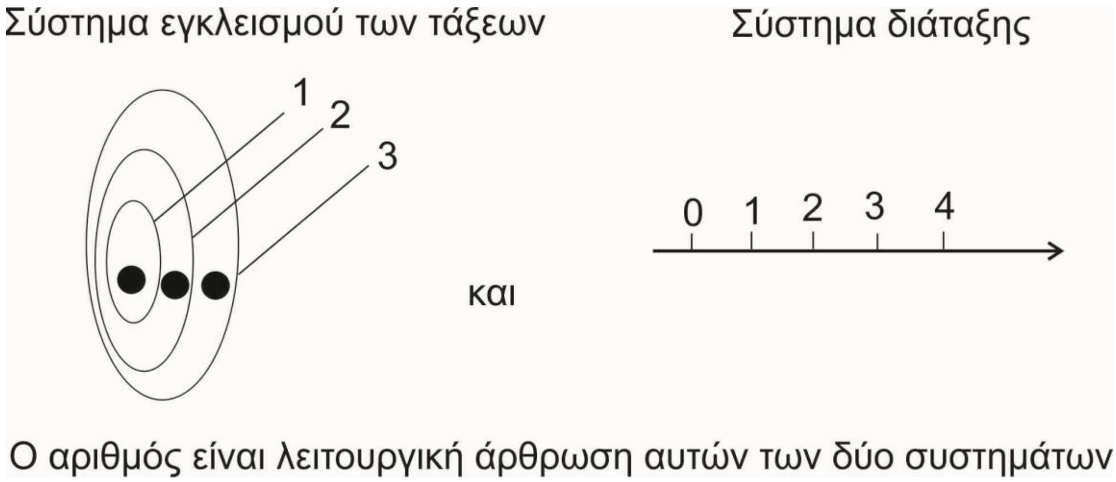
Αυτήν τη σημαντική ανακάλυψή του, της μη διατήρησης του αριθμού πριν από τα 6 χρόνια, τη συνδέει με μια επιστημολογική αρχή, την οποία τονίζει από τις πρώτες γραμμές του βιβλίου "*La genese du nombre chez l'enfant" (Piaget & Szeminska, 1941):*
Κάθε γνώση, είτε είναι επιστημονική είτε προέρχεται από κοινές έννοιες, προϋποθέτει ένα άμεσο ή έμμεσο σύστημα, των αρχών της διατήρησης.

Στο έργο αυτό οι Piaget & Szeminska αναφέρουν μια σειρά από πειράματα που πραγματοποίησαν για να εξετάσουν τη "**διατήρηση του αριθμού**" στα παιδιά, δηλαδή την κατανόηση της πληθικής έκφρασης του αριθμού. Στα πειράματα αυτά με ασυνεχείς ποσότητες προκλήθηκε η αντιστοίχιση μεταξύ μπουκαλιών και ποτηριών, λουλουδιών και βάζων, χρημάτων και εμπορευμάτων κλπ.

Η κατασκευή του αριθμού ως σύνθεση της διάταξης και της πληθικότητας

Ο Piaget συμπεραίνει ότι για μια πραγματική κατανόηση και εφαρμογή των φυσικών αριθμών χρειάζεται μια εκτίμηση ταυτόχρονα της διατακτικής και πληθικής έκφρασης, μαζί με την απαραίτητη σχέση μεταξύ αυτών των δύο. Θεωρεί ότι αυτό αποκτιέται τον ίδιο χρόνο με την ανάπτυξη πολλών άλλων λογικών λειτουργιών, σε γενικές γραμμές γύρω στα 6 με 8 χρόνια για το μέσο όρο των παιδιών.

Σύμφωνα με την Πιαζετιανή θεωρία ο αριθμός μπορεί να διαμορφωθεί στο παιδί από τη σύνθεση δύο συστημάτων: του συστήματος της διάταξης και του συστήματος του εγκλεισμού των τάξεων.



Σχήμα 3.5. Ο αριθμός είναι η λειτουργική άρθρωση των συστημάτων εγκλεισμού των τάξεων και διάταξης.

Λέει, λοιπόν, ο ίδιος ο Piaget στην εισαγωγή του βιβλίου του (J. Piaget - A. Szeminska,1941):

"Δεν αρκεί καθόλου στα μικρά παιδιά να ξέρουν να μετρούν προφορικά "ένα, δύο, τρία, κλπ" για να πούμε ότι κατέχουν την έννοια του αριθμού. Ένα άτομο των 5 χρόνων, για παράδειγμα, μπορεί να είναι ικανό να απαριθμεί πολύ καλά τα στοιχεία μιας σειράς από 5 χάντρες, αν όμως διαχωρίσουμε τις 5 χάντρες σε δυο συλλογές των 2 και των 3 στοιχείων μπορεί να σκεφτεί ότι η ένωση αυτών των δυο υποσυλλογών δεν ισοδυναμεί με την αρχική συνολική συλλογή. Ο αριθμός βασίζεται σε μια λειτουργική δομή του συνόλου και όταν λείπει αυτή δεν υπάρχει ακόμη διατήρηση του αριθμού συνολικά που να είναι ανεξάρτητη της σχηματικής του παρουσίασης. ... Σε τι συνίσταται, λοιπόν, αυτή η λειτουργική δομή της σειράς των ακεραίων 1, 2, 3, ... ; Το κύριο αποτέλεσμα στο οποίο οδηγηθήκαμε είναι ότι αυτή η δομή δημιουργείται από τη σύνθεση, σ'ένα μοναδικό σύστημα, των δυο πιο απλών δομών, οι οποίες είναι η "ομαδοποίηση" του εγκλεισμού των τάξεων και αυτή της σειροθέτησης ή των σχέσεων της διάταξης. Δεν υπάρχει, λοιπόν, κατασκευή του πληθικού αριθμού ξεχωριστά και του διατακτικού αριθμού ξεχωριστά, αλλά και οι δύο μαζί διαμορφώνονται με αδιαχώριστο τρόπο από τη συνένωση των τάξεων και των σχέσεων της διάταξης."

Η πληθικότητα και η απαρίθμηση

Οι έννοιες της *πληθικότητας* (numerosity) και της *απαρίθμησης* είναι σημαντικές και συμβάλουν στη δημιουργία και ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, των πράξεων και γενικά των πρώτων αριθμητικών εννοιών στο παιδί.

Η έννοια της πληθικότητας (numerosity) χρησιμοποιείται για να δείξει τον αριθμό των αντικειμένων σ' ένα σύνολο. Όπως δηλώνει και ο Butterworth (2005, σελ. 3), ο όρος *πληθικότητα* (numerosity) χρησιμοποιείται στο κείμενό του ως το γνωστικό ομόλογο του όρου *πληθάριθμος* (cardinality), που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά και την λογική.

Υπό συζήτηση είναι το ερώτημα σχετικά με τον εάν η κατανόηση της σημασίας της πληθικότητας από το παιδί οφείλεται σε μια συγκεκριμένη έμφυτη ικανότητα για τις πληθικότητες ή οφείλεται σε μια γενική ικανότητα για την αντιμετώπιση και την ευαισθησία των ποσοτήτων (Butterworth, 2005). Για το συγκεκριμένο θέμα τα περισσότερα στοιχεία τα αντλούμε από τους ανθρώπους που εμφανίζουν ένα επιλεκτικό έλλειμμα στην ικανότητα της πληθικότητας, το οποίο και τους επηρεάζει γενικότερα στη μάθηση της αριθμητικής. Αυτή η κατάσταση είναι η *δυσαριθμησία*.

Με την έννοια της πληθικότητας και τη λειτουργία της αρίθμησης μπορούμε να βρούμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου και να προσδιορίσουμε τον αριθμό. Από την πλευρά της ανθρώπινης συμπεριφοράς είναι σημαντικές η πληθικότητα και η απαρίθμηση, οι οποίες συνδέονται στα μαθηματικά με τις έννοιες του πληθάριθμου και του συνόλου.

Οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση) μπορούν να οριστούν με βάση τις πράξεις στα σύνολα και τους πληθαρίθμους τους. Για παράδειγμα, η πρόσθεση 3+4 είναι πρόσθεση δύο πληθαρίθμων ξένων συνόλων με 3 και 4 στοιχεία αντίστοιχα. Η πρόσθεση ορίζεται με την ένωση δύο ή περισσότερων ξένων συνόλων. Παρόμοια και οι άλλες πράξεις, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση ορίζονται με τις πράξεις των συνόλων (π.χ. βλέπε Χ. Λεμονίδης, 2000).

Τα σύνολα και οι πληθάριθμοι αποτελούν κοινό σημείο και σημείο επικοινωνίας των μαθηματικών με την πραγματικότητα, την καθημερινή ζωή και, κατ' επέκταση, την ανθρώπινη συμπεριφορά. Τα σύνολα σχετίζονται με την πραγματικότητα, καθώς αντιστοιχούν σε συλλογές αντικειμένων με τα πλήθη τους, ενώ η πληθικότητα σχετίζεται με την απαρίθμηση ως ανθρώπινη συμπεριφορά. Έτσι, για παράδειγμα, το πρόβλημα «Πόσα είναι μαζί 3 κόκκινα και 4 κίτρινα τριαντάφυλλα;», που είναι μια κατάσταση της πραγματικότητας, για τα μαθηματικά είναι η ένωση των δύο συνόλων και το άθροισμα των πληθαρίθμων τους 3 και 4. Για την ανθρώπινη συμπεριφορά αντιστοιχεί στην απαρίθμηση του συνόλου των 3 κόκκινων, του συνόλου των 4 κίτρινων και της άθροισης των δύο πληθικοτήτων.

Το παιδί από τα πρώτα χρόνια της ζωής του, όπως θα δούμε παρακάτω, διαθέτει τους μηχανισμούς για να εκτιμά και να αριθμεί τις ποσότητες. Στη συνέχεια, με βάση την πληθικότητα και την απαρίθμηση, μπορεί να προσεγγίζει τους αριθμούς. Πραγματοποιεί λειτουργίες όπως: βάζω μαζί και γίνονται πολλά, βγάζω, μετρώ με μονάδα μεγαλύτερη του 1, π.χ., 5, 10, 15, μοιράζω σε ίσα μέρη, οι οποίες αποτελούν άτυπες στρατηγικές και την αρχή των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αντίστοιχα. Στο νηπιαγωγείο διδάσκονται οι πρώτοι αριθμοί με βάση την απαρίθμηση και την πληθικότητα, καθώς και λειτουργίες πρόσθεσης, αφαίρεσης και μοιρασιάς σε μικρά σύνολα, όπως βάζω ή βγάζω ένα, μοιράζω ίσα.

Στην Α΄ τάξη, με βάση το ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών, διδάσκονται οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 20 με νοερό τρόπο, χωρίς τους γραπτούς αλγόριθμους. Στην Β΄ και Γ΄ τάξη διδάσκονται τα μονοψήφια γινόμενα του πολλαπλασιασμού (προπαίδεια) και οι αντίστοιχες νοερές διαιρέσεις. Στο επίπεδο αυτό, επίσης, αρχίζει η διδασκαλία των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις με μεγάλους αριθμούς πραγματοποιούνται μετά από τη Γ΄ και Δ΄ τάξη. Νοεροί πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με μεγάλους αριθμούς πραγματοποιούνται επίσης μετά την Δ΄ τάξη. Οι νοερές πράξεις με ρητούς αριθμούς (κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά) πραγματοποιούνται στις μεγάλες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου.

Η έννοια της πληθικότητας, η οποία όπως είδαμε προηγουμένως έχει θεμελιώδη σημασία για τον σχηματισμό των πρώτων αριθμητικών εννοιών, παρουσιάζεται από τους πρώτους μήνες της ζωής του ανθρώπου. Πολλά πειράματα πραγματοποιήθηκαν σε βρέφη, για να εξετάσουν την ικανότητα τους να διακρίνουν τα στοιχεία ενός συνόλου. Τα βρέφη από την ηλικία των τεσσάρων μηνών, ίσως και νωρίτερα, είναι σε θέση να διακρίνουν το ένα αντικείμενο από τα δύο και τα δύο από τα τρία (Starkey & Cooper, 1980; Antell & Keating, 1983; Starkey, Spelke & Gelman, 1990). Πρώτοι οι Starkey & Cooper (1980) έδειξαν ότι βρέφη 4-6 μηνών ήταν ευαίσθητα στην πληθικότητα μιας σειράς μαύρες τελείες. Χρησιμοποίησαν το πείραμα "εξοικείωση – μη εξοικείωση", σύμφωνα με το οποίο τα βρέφη κοιτάζουν περισσότερο τα νέα πράγματα στο οπτικό τους πεδίο. Η επανάληψη του ίδιου πράγματος κάνει τα βρέφη να το συνηθίζουν και να χάνουν το ενδιαφέρον τους (εξοικείωση), ενώ με ένα νέο αντικείμενο επαναφέρουν το ενδιαφέρον τους (μη εξοικείωση). Σε αυτήν την έρευνα, κάθε φορά που οι Starkey & Cooper άλλαζαν τον αριθμό των κουκίδων, τα βρέφη έδειχναν μη εξοικείωση σ' έναν αριθμό κουκίδων έως το τέσσερα.

Η κατοχή της έννοιας της πληθικότητας σημαίνει επίσης την ικανότητα εντοπισμού μιας αλλαγής στο πλήθος ενός συνόλου, όταν προστίθενται ή αφαιρούνται καινούργια στοιχεία. Είναι, δηλαδή, οι ικανότητες που απαιτούνται για τις αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Ο Wynn (1992), κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι τα βρέφη κοιτούν περισσότερο ό,τι παραβιάζει τις προσδοκίες τους, έδειξε ότι βρέφη 4-6 μηνών είναι ικανά να εντοπίζουν αυτήν την αλλαγή της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης στην πληθικότητα.

Η προφορική αρίθμηση

Η καταμέτρηση ή απαρίθμηση είναι ένα από τα στοιχεία του ανθρώπινου πολιτισμού που εμφανίζονται από τα πρώτα και είναι από τα πιο σημαντικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού στο παιδί. Η απαρίθμηση ή καταμέτρηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων απαιτεί την αντιστοίχιση ένα προς ένα κάθε αριθμολέξης με ένα αντικείμενο. Επομένως, για την εκτέλεση της απαρίθμησης είναι απαραίτητη γνώση της **προφορικής ακολουθίας** των φυσικών αριθμών (1, 2, 3, …). Αυτή η ικανότητα της προφορικής αρίθμησης, που έχει χαρακτήρα γλωσσικό, εμφανίζεται από πολύ νωρίς -σχεδόν με την εμφάνιση της ομιλίας- στο παιδί και εξελίσσεται για μεγάλο χρονικό διάστημα. Έρευνες (Fuson & Hall, 1983; Fuson, Richard & Briars, 1982) βρίσκουν ότι η ικανότητα της προφορικής αρίθμησης ξεκινάει από την ηλικία των δύο χρόνων και στο τέλος της Α΄ τάξης ή την αρχή της Β΄ τάξης τα παιδιά φτάνουν να μετρούν σχεδόν μέχρι το 100. Για μια λεπτομερή παρουσίαση της ανάπτυξης της προφορικής αρίθμησης στο παιδί βλέπε Χ. Λεμονίδης (1994, σελ. 27-41).

'Οπως γνωρίζουμε, το σύνολο των φυσικών αριθμών αποτελείται από μια ακολουθία αριθμών που έχει άπειρα στοιχεία. Εάν για κάθε φυσικό αριθμό είχαμε ένα ιδιαίτερο όνομα, άσχετο με τα ονόματα όλων των άλλων, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε άπειρες λέξεις για να τους ονομάσουμε και θα ήταν αδύνατο βέβαια να συγκρατήσουμε στη μνήμη μας τόσα πολλά ονόματα. Αναγκάστηκαν λοιπόν οι άνθρωποι να βρουν κάποιο τρόπο, ώστε συνδυάζοντας ορισμένες ελάχιστες λέξεις διαφορετικές μεταξύ τους να είναι σε θέση να ονομάσουν οποιονδήποτε αριθμό. Ο τρόπος αυτός, με τον οποίο οι φυσικοί αριθμοί ονομάζονται με κάποιες συγκεκριμένες λέξεις, λέγεται **προφορική αρίθμηση**.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε μερικές ιδιαιτερότητες ως προς την κανονικότητα της γλωσσικής έκφρασης των αριθμών, μέχρι το χίλια, στην Ελληνική γλώσσα:

- Στην πρώτη δεκάδα οι αριθμοί *ένδεκα* και *δώδεκα* δεν παρουσιάζουν γλωσσική κανονικότητα και μοιάζουν αυθαίρετοι σε σχέση με τον τρόπο σχηματισμού των υπολοίπων (δεκατρία, δεκατέσσερα, ..., δεκαεννέα). Σε σχέση μ'αυτήν την κανονικότητα θα έπρεπε να ήταν *δεκαένα* και *δεκαδύο*.

Σε άλλες γλώσσες υπάρχουν επίσης τέτοιες μη κανονικότητες· για παράδειγμα, στην Αγγλική γλώσσα συναντούμε στην πρώτη δεκάδα, όπως και στη δική μας γλώσσα, τους δύο αυθαίρετους αριθμούς *eleven* και *twelve*, αλλά επίσης και τους μη κανονικούς γλωσσικά αριθμούς με την κατάληξη **teen**, *thirteen* και *fifteen* αντί για *threeteen* και *fiveteen*.

- Οι λέξεις των αριθμών των δεκάδων δεν εκφράζονται με μια κανονικότητα όπως: *δύο δέκα, τρία δέκα, τέσσερα δέκα, ..., εννέα δέκα* αντί για είκοσι, τριάντα σαράντα, ..., ενενήντα. Σ'αυτούς τους αριθμούς το *είκοσι* δε μοιάζει με τους υπόλοιπους που έχουν κατάληξη **-ντα** (τριά**ντα**, σαρά**ντα**, ..., ενενή**ντα**). Αλλά και από αυτούς τους αριθμούς που καταλήγουν σε **-ντα** άλλοι καταλήγουν σε **-άντα** (τρι**άντα**, σαρ**άντα**) και άλλοι σε **-ήντα** (πεν**ήντα**, εξ**ήντα**, εβδομ**ήντα** και ενεν**ήντα**).

Το θέμα των λέξεων επίσης δε σχηματίζεται κανονικά σε όλους αυτούς τους αριθμούς, με τη χρήση των λέξεων των μονάδων· για παράδειγμα λέμε *σαράντα* και όχι *τεσσεράντα*.

- Οι λέξεις που εκφράζουν τις εκατοντάδες, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, ..., εννιακόσια δε σχηματίζονται με μια κανονικότητα όπως: δύο εκατό, τρία εκατό, τέσσερα εκατό, ..., εννιά εκατό. Αυτοί οι αριθμοί, λοιπόν, σχηματίζονται με τη ρίζα των λέξεων των αριθμών των μονάδων, δύο, τρία, τέσσερα, ..., εννιά και την κατάληξη **-κόσια.**

Σε σχέση με τη ρίζα επίσης, η λέξη του αριθμού τετρακόσια παρουσιάζει μη κανονικότητα ως προς τη λέξη τεσσερακόσια.

Αν μελετήσουμε, όπως το έκαναν οι Siegler & Robinson (1982), τα σημεία που σταματούν τα παιδιά όταν απαγγέλλουν την ακολουθία των αριθμών, παρατηρούμε ότι, όταν η αρίθμηση σταματά μέσα στο μέρος που είναι μικρότερο από 20, αυτά προφανώς δε διαθέτουν το (γλωσσικό) κανόνα του σχηματισμού των δεκάδων. 'Οταν η αρίθμηση φτάνει μέχρι το 99, ο κανόνας αυτός φαίνεται να ελέγχεται: αν δώσουμε στο παιδί έναν αριθμό με δύο ψηφία που τελειώνει σε 1 (21,71...) θα συμπληρώσει την ακολουθία μέχρι το 9 (29,79...), αλλά θα συναντήσει δυσκολίες όταν θα πρέπει να αλλάξει δεκάδα. Αυτό είναι ένα πολύ γενικό φαινόμενο που το συναντούμε επίσης συστηματικά στους ενήλικες όταν μεταχειρίζονται αριθμούς σε βάσεις διαφορετικές του δέκα.

Τα παιδιά της πρώτης δημοτικού δεν μπορούμε να πούμε ότι χρησιμοποιούν την προφορική ακολουθία των αριθμών από το 0 μέχρι το 100 χωρίς προβλήματα. Αρκετές έρευνες δείχνουν ότι σ΄αυτή την ηλικία υπάρχουν σοβαρές δυσκολίες ενσωμάτωσης της αριθμητικής ακολουθίας στη μνήμη. Στο επίπεδο αυτό δεν ακολουθούνται οι απλοί κανόνες της επανάληψης και της διαδοχής. Επιπλέον, οι αριθμοί οι μικρότεροι του 40 φαίνεται να χρησιμοποιούνται διαφορετικά και καλύτερα από τους μεγαλύτερους του 40.

Η ουσιαστική μάθηση της προφορικής αριθμητικής ακολουθίας συνεχίζεται για πολύ ακόμη και μετά που το παιδί είναι ικανό να παράγει σωστά τις λέξεις-αριθμούς.

Αυτή η συνεχής λειτουργική μάθηση που διαρκεί σχεδόν από την ηλικία των 4 μέχρι 8 χρόνων εκδηλώνεται με τη διαδοχική εμφάνιση νέων ικανοτήτων.
Οι Fuson και άλλοι (1982) οργανώνουν αυτές τις ικανότητες και προσδιορίζουν πέντε επίπεδα ανάπτυξης της λειτουργικής φάσης της προφορικής αριθμητικής ακολουθίας. Τα πέντε αυτά επίπεδα είναι:

α) το επίπεδο **της αλυσίδας**, όπου οι λέξεις-αριθμοί λειτουργούν σαν ένα συμπαγές και αδιαχώριστο όλο,
β) το επίπεδο **της αδιαίρετης αλυσίδας**, όπου οι λέξεις είναι διαχωρισμένες αλλά η ακολουθία απαγγέλλεται μόνο σε ευθεία κατεύθυνση και μπορεί να παράγεται μόνο αρχίζοντας από την αρχή,
γ) το επίπεδο **της διασπασμένης αλυσίδας,** όπου μπορεί να παράγονται κομμάτια της προφορικής ακολουθίας αρχίζοντας από οποιοδήποτε στοιχείο, αντί να γίνεται η αρχή πάντοτε από το πρώτο στοιχείο,
δ) το επίπεδο **της αριθμήσιμης αλυσίδας**, όπου οι λέξεις-αριθμοί γίνονται ακόμη πιο αφηρημένες και αποτελούν μονάδες με την αριθμητική έννοια, και έτσι κομμάτια της προφορικής ακολουθίας μπορούν να αναπαριστούν μια αριθμητική κατάσταση και μπορεί να αριθμούνται ή να αντιστοιχούνται, και
ε) το επίπεδο **της διπλής κατεύθυνσης**, όπου η προφορική ακολουθία μπορεί να παράγεται εύκολα και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Αυτά τα διαφορετικά επίπεδα χαρακτηρίζονται από μια αύξουσα σειρά ικανοτήτων. Έτσι ο μαθητής γίνεται προοδευτικά ικανός: να αρχίζει και να σταματάει την αρίθμηση σε οποιαδήποτε λέξη-αριθμό της ακολουθίας, να αριθμεί προς τα πάνω για ένα δεδομένο πλήθος από λέξεις-αριθμούς, και να αριθμεί αντίστροφα αρχίζοντας και σταματώντας σε οποιοδήποτε αριθμό ή να αριθμεί αντίστροφα για ένα δεδομένο πλήθος λέξεων-αριθμών. Διαμέσου αυτών των επιπέδων, λοιπόν, το παιδί αυξάνει την ικανότητά του στο να καταλαβαίνει και να παράγει τις σχέσεις της διάταξης των λέξεων-αριθμών μέσα στην ακολουθία των αριθμών.

Η καταμέτρηση ή απαρίθμηση

Η απαρίθμηση ή καταμέτρηση αποτελεί την πρώτη γέφυρα από την έμφυτη ικανότητα του παιδιού για πληθικότητα σε πιο προχωρημένα μαθηματικά επιτεύγματα του πολιτισμού μέσα στον οποίο γεννήθηκε. Μπορεί, δηλαδή, το παιδί να μετράει τα αντικείμενα ενός συνόλου με περισσότερα στοιχεία και να βρίσκει το πλήθος τους. Αυτή η ικανότητα της απαρίθμησης, που μπορεί να φαίνεται στους ενήλικες απλή και αυτονόητη, αναπτύσσεται στο παιδί σχεδόν κατά τη διάρκεια τεσσάρων χρόνων, ξεκινάει από την ηλικία των 2 χρόνων και εξελίσσεται μέχρι τα 6 χρόνια.

Άμεση εκτίμηση (Subitizing)

Πρώτοι οι Kaufman, Lord, Reese και Volkmann (1949) εισήγαγαν το ρήμα "subitiser" (που προέρχεται από το λατινικό επίθετο "subitus" που σημαίνει ξαφνικός, άμεσος, στιγμιαίος) και παρατήρησαν ότι οι κρίσεις για τον αριθμό ενός πλήθους μπορεί να είναι συγκριτικές ή απόλυτες. Αυτοί ενδιαφέρθηκαν για τις απόλυτες κρίσεις.

'Ολοι γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο τύποι πολύ γρήγορων απόλυτων κρίσεων: αυτές που είναι για πολύ μικρές συλλογές και για τις οποίες η κρίση είναι σχεδόν πάντοτε ακριβής και αυτές που είναι για αρκετά μεγάλες συλλογές και για τις οποίες η κρίση είναι σχεδόν πάντοτε λάθος (ακόμη και αν είναι σχεδόν σωστή).

Με τον όρο *"άμεση εκτίμηση"* ονομάζουμε τη γρήγορη, ακριβή και σίγουρη εκτίμηση του πλήθους μιας συλλογής, που παρουσιάζεται κατά μια πολύ σύντομη χρονική διάρκεια. Πρόκειται για μια ολική αντίληψη μιας ποσότητας χωρίς την προσφυγή στην απαρίθμηση.

Επειδή η ικανότητα της άμεσης εκτίμησης εμφανίζεται από πολύ νωρίς στα παιδιά, εξετάστηκε από πολλούς ερευνητές η υπόθεση ότι αυτή η ικανότητα είναι έμφυτη, ότι δηλαδή την έχει ο άνθρωπος ως φυσικό χάρισμα από τη γέννησή του.

Σ΄αυτήν την κατεύθυνση οι Strauss και Curtis (1981) πραγματοποίησαν έρευνες σε βρέφη για να εξετάσουν τις ικανότητες που διέθεταν για τους αριθμούς. Τα συμπεράσματα αυτών των ερευνών είναι ότι τα παιδιά έρχονται στον κόσμο διαθέτοντας μερικές ικανότητες και μερικούς μηχανισμούς που τους επιτρέπουν να αποσπούν τις αριθμητικές πληροφορίες του περιβάλλοντος. Οι ικανότητες αυτές όμως προέρχονται από τις **πρωτοαριθμητικές** γνώσεις που απέχουν αρκετά από τις μεταγενέστερες αριθμητικές γνώσεις.

Τελικά, οι έρευνες έδειξαν ότι, αν και από πέντε μηνών τα βρέφη όταν τους παρουσιάζονται ποσότητες με αριθμό αντικειμένων μικρότερο του τέσσερα τις ξεχωρίζουν, αυτό γίνεται εντελώς αντιληπτικά. Είναι εντελώς απίθανο να ξέρουν να απαριθμούν ή να εφαρμόζουν κάποια στρατηγική της αρίθμησης.

Επομένως, ο μηχανισμός της άμεσης εκτίμησης δεν είναι έμφυτος. Επίσης, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η εκτίμηση του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων απαιτεί κάθε φορά την έκθεσή τους μπροστά στο υποκείμενο για ένα συγκεκριμένο χρόνο. Πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι μια διαδικασία που γίνεται αυτόματα και δεν μπορούμε να την παραβάλλουμε, για παράδειγμα, με την αντίληψη των χρωμάτων που είναι πολύ πιο γρήγορη.

Με σκοπό να εξετάσουν αφενός τα πιθανά στοιχεία που συνθέτουν τη διαδικασία της άμεσης εκτίμησης και αφετέρου το αν αυτή η διαδικασία είναι ένας μηχανισμός που μαθαίνεται και υφίσταται μια εξέλιξη, οι Mandler & Shebo (1982) διεξήγαγαν μια σειρά από έρευνες σε ενήλικες.

Σύμφωνα μ΄αυτούς η άμεση εκτίμηση δεν είναι τίποτα παραπάνω από την αναγνώριση των **κανονικών αντιληπτικών προτύπων**, που είναι αποκτήματα που σχετίζονται με μερικές ολιγάριθμες συλλογές με μικρή πυκνότητα.

Αυτήν τη θέση τη στηρίζουν με πολλά πειράματα. Βρίσκουν καταρχήν ότι οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι ενήλικες διαφέρουν σύμφωνα με το αν έχουν να εκτιμήσουν ποσότητες μικρότερες ή μεγαλύτερες από 4. Για τις ποσότητες τις μικρότερες του 4, δηλαδή με 1, 2 ή 3 στοιχεία, ο χρόνος εκτίμησης μένει σχεδόν σταθερός. Για ποσότητες μεγαλύτερες του 4 ο χρόνος της εκτίμησης μεταβάλλεται ανάλογα με το μέγεθος της συλλογής, πράγμα που σημαίνει ότι στις μεγάλες συλλογές πραγματοποιείται η απαρίθμηση.

Διαπιστώθηκε επίσης ότι οι χρόνοι εκτίμησης στα "κανονικά" πρότυπα ήταν γενικά πιο μικροί απ΄ότι ήταν οι χρόνοι με τυχαίες διατάξεις των στοιχείων.

Οι Mandler και Shebo ξαναβρίσκουν ένα φαινόμενο που έχουμε ήδη επισημάνει: ότι δηλαδή, τα άτομα σε μια πολύ μικρή διάρκεια παρουσίασης (100 msec) δεν μπορούν να προσδιορίσουν την ποσότητα. Δεν πρόκειται λοιπόν για ένα μηχανισμό *"στιγμιαίο"*, όπως γίνεται για παράδειγμα με το χρώμα. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν για τους ενήλικες μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε ότι η άμεση εκτίμηση αναπτύσσεται όχι ως διαδικασία, αλλά ως προς τα "κανονικά" πρότυπα στα οποία εφαρμόζεται.

Η καταμέτρηση ή απαρίθμηση

Με τον όρο **απαρίθμηση** ή **καταμέτρηση** μιας συλλογής οντοτήτων ονομάζουμε την αντιστοίχιση ένα προς ένα των αριθμών-λέξεων της προφορικής ακολουθίας των φυσικών αριθμών N*=N-{0} με τα στοιχεία της συλλογής. Η τελευταία αριθμός-λέξη που αντιστοιχεί στο τελευταίο στοιχείο της συλλογής αναπαριστά το πλήθος ή τον πληθάριθμο της συλλογής.

Η απαρίθμηση είναι μια δραστηριότητα η οποία δεν είναι απλή και μονοσήμαντη, αλλά μπορεί να αναλυθεί σε επιμέρους δραστηριότητες που τη συνθέτουν, όπως:

- Διάκριση και "κατάδειξη[1]" όλων των στοιχείων μιας συλλογής το ένα μετά το άλλο.
- Απόδοση ενός ονόματος αριθμού σε κάθε διακριτό στοιχείο της συλλογής ένα προς ένα.
- Καλή γνώση και χρησιμοποίηση της σταθερής ακολουθίας των ονομάτων των αριθμών και αντιστοίχισης κάθε ονόματος με ένα διαφορετικό από τα αντικείμενα προς απαρίθμηση.
- Αναγνώριση ότι το τελευταίο όνομα από την ακολουθία που χρησιμοποιήθηκε αναπαριστά τον πληθάριθμο της συλλογής.

1 "Κατάδειξη" : δείχνω ή αγγίζω τα στοιχεία που απαριθμώ
για να τα διακρίνω από αυτά που πρόκειται να απαριθμηθούν.

Οι Gelman and Gallistel (1978) προσδιόρισαν τις ικανότητες, που ονόμασαν *αρχές*, οι οποίες απαιτούνται για να είναι κάποιος ικανός να απαριθμεί. Οι πέντε αυτές αρχές παρουσιάζονται παρακάτω με ένα παράδειγμα, στο οποίο ένα παιδί καλείται να μετρήσει 6 αυτοκινητάκια.

1) Πρέπει να ξέρει να απαγγέλει προφορικά από το ‘ένα’ μέχρι το ‘έξι’ ή και περισσότερο και κάθε φορά να κρατάει σταθερή τη σειρά των αριθμολέξεων (*Αρχή της σταθερής ακολουθίας*).
2) Σε κάθε αυτοκινητάκι πρέπει να αντιστοιχεί μια και μόνο αριθμολέξη (*Αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα*).
3) Η αριθμολέξη ‘έξι’, που αντιστοιχεί στο τελευταίο αυτοκινητάκι, δείχνει το συνολικό αριθμό από τα αυτοκινητάκια – τον πληθάριθμο (*Αρχή της πληθικότητας*).
4) Το πόσα είναι τα αυτοκινητάκια δεν εξαρτάται από το χρώμα τους, το μέγεθός τους, το αν είναι όμοια, κτλ. (*Αρχή της αφαίρεσης*).
5) Μπορούμε να απαριθμήσουμε τα αυτοκινητάκια ξεκινώντας από όποιο θέλουμε, αρκεί να τα μετρήσουμε όλα (*Αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς*).

Για μια λεπτομερή παρουσίαση της απαρίθμησης και των αρχών της βλέπε Χ. Λεμονίδης (1994, σελ. 43-62).

Ο Butterworth (2005) προτείνει έναν πίνακα με τους σημαντικότερους σταθμούς στην πρώιμη ανάπτυξη της αριθμητικής, τον οποίο παρουσιάζουμε παρακάτω:

Ηλικία	Ορόσημα (Τυπική έρευνα)
0;0	Μπορεί να διακρίνει με βάση τις μικρές πληθικότητες (Antell & Keating, 1983)
0;4	Μπορεί να προσθέτει και να αφαιρεί ένα (Wynn, 1992)
0;11	Διαχωρίζει τις αύξουσες από τις φθίνουσες ακολουθίες πληθικοτήτων (Brannon, 2002)
2;0	Αρχίζει να μαθαίνει ακολουθίες λέξεων αρίθμησης (Fuson, 1992), μπορεί να κάνει αντιστοίχιση ένα προς ένα σ' ένα έργο μοιρασιάς (Potter & Levy, 1968)
2;6	Αναγνωρίζει ότι οι λέξεις των αριθμών σημαίνουν περισσότερο από ένα (Wynn, 1990)
3;0	Απαριθμεί αντικείμενα μικρού πλήθους (Wynn, 1990)
3;6	Μπορεί να προσθέτει και να αφαιρεί ένα με αντικείμενα και αριθμολέξεις (Starkey & Gelman, 1982). Μπορεί να χρησιμοποιεί την αρχή της πληθικότητας, για να διαπιστώσει το πλήθος του συνόλου (Gelman & Gallistel, 1978)
4;0	Μπορεί να χρησιμοποιήσει δάχτυλα, για να βοηθηθεί στην πρόσθεση (Fuson & Kwon, 1992)
5;0	Μπορεί να προσθέτει μικρούς αριθμούς χωρίς να είναι σε θέση να μετρά το άθροισμα (Starkey & Gelman, 1982)
5;6	Καταλαβαίνει την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και απαριθμεί από τον μεγαλύτερο (Carpenter & Moser, 1982)˙ μπορεί να μετρά σωστά μέχρι το 40 (Fuson, 1988)
6;0	'Διατηρεί' τον αριθμό (Piaget, 1952)
6;6	Καταλαβαίνει τη συμπληρωματικότητα της πρόσθεσης με την αφαίρεση (Bryant et al, 1999)˙ μπορεί να μετρά σωστά μέχρι το 80 (Fuson, 1988)
7;0	Ανακαλεί μερικά αριθμητικά γεγονότα από την μνήμη

Πίνακας 1.1.: Ορόσημα στην πρώιμη ανάπτυξη της αριθμητικής (Butterworth, 2005, σελ. 12)

Ο Butterworth (2005) σημειώνει, ωστόσο, ότι δεν υπάρχει μια κανονικότητα στις ηλικίες, όπως αυτές παρατίθενται στον πίνακα, όπου απλώς καταγράφονται οι ηλικίες των περισσότερων παιδιών που συμμετείχαν στις έρευνες. Στόχος των ερευνών αυτών δεν ήταν η περιγραφή των ηλικιών, αλλά των σταδίων ανάπτυξης. Διαφορετικά παιδιά μπορούν να φτάσουν τα ορόσημα σε πολύ διαφορετικές ηλικίες.
Ο Butterworth σημειώνει, επίσης, ότι αυτά τα ορόσημα δεν είναι ανεξάρτητα από τον πολιτισμό στον οποίο ζουν τα παιδιά. Τα δεδομένα αυτά προέρχονται κυρίως από παιδιά που μεγάλωσαν στην Ευρώπη και την Αμερική. Έρευνες δείχνουν ότι η δομή του συστήματος της προφορικής αρίθμησης μπορεί να επιταχύνει ή να επιβραδύνει την απόκτηση των αριθμητικών εννοιών. Έτσι, παιδιά που μιλούν γλώσσες με πολύ κανονική προφορική δομή, όπως για παράδειγμα είναι η κινέζικη, αποκτούν κάποιες αριθμητικές έννοιες νωρίτερα (Butterworth, 1999; Nunes & Bryant, 1996).

Πολλαπλασιασμός, διαίρεση και ρητοί αριθμοί

Όπως είδαμε και παραπάνω, στο Πρόγραμμα Σπουδών ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση εισάγονται αργότερα από την πρόσθεση και την αφαίρεση. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δομούνται, όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση, με βάση την έννοια του συνόλου και της πληθικότητας, ο πολλαπλασιασμός παρουσιάζεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ενώ η διαίρεση επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή μοιρασιά.

Από νωρίς τα παιδιά μπορούν να χειριστούν καταστάσεις πολλαπλασιασμού με τη λογική της αντιστοίχισης ένα-προς-πολλά, για παράδειγμα, 1 ποδήλατο έχει 2 ρόδες, 3 ποδήλατα θα έχουν 2+2+2=6 ρόδες. Η διαίρεση ως μοιρασιά εμφανίζεται επίσης πολύ νωρίς στην ανάπτυξη των παιδιών, η έννοια του μισού ως μοιρασιά ενός συνόλου ή χωρισμός στη μέση, εισάγεται ήδη από την Α΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου. Μετά από μελέτες σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις φαίνεται ότι δεν ισχύει η κοινή άποψη ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι τίποτα άλλο από επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η διαίρεση επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή μοιρασιά (Nunes & Bryant, 1996). Υπάρχουν σίγουρα συνδετικοί κρίκοι μεταξύ της προσθετικής και της πολλαπλασιαστικής συλλογικής, αλλά υπάρχουν και αρκετές νέες έννοιες στην πολλαπλασιαστική συλλογιστική, οι οποίες δεν εμφανίζονται στις προσθετικές καταστάσεις. Μια τέτοια έννοια είναι *ο λόγος*, που αποτελεί ένα νέο είδος νοήματος του αριθμού και εκφράζει μια κατάσταση ένα-προς-πολλά αντίστοιχα. Ο λόγος δεν δείχνει έναν πληθάριθμο και ένα αριθμό, αλλά μια σχέση μεταξύ δύο αριθμών.

Τα προβλήματα του πολλαπλασιασμού μπορούν να λυθούν με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, όταν οι ποσότητες είναι *εκτατικές* (Schwartz, 1988), δηλαδή όταν οι ποσότητες μπορούν να μετρηθούν με κάποιο μέτρο ή να απαριθμηθούν. Τέτοιες καταστάσεις με εκτατικές ποσότητες είναι για παράδειγμα οι εξής: Πόσες καραμέλες υπάρχουν σε 4 σακούλες, όταν κάθε σακούλα έχει 6 καραμέλες; Πόσα μήκος έχουν 8 τραπέζια μαζί, όταν κάθε τραπέζι έχει μήκος 3 μέτρα;

Η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, όμως, είναι εντελώς ανεπαρκής για την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν *εντατικές* ποσότητες. Οι εντατικές ποσότητες αναπαριστούν τη σχέση μεταξύ δύο εκτατικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα οι τιμές: 1,30 € το κιλό, 15 € την ώρα, 9 λίτρα το χιλιόμετρο. Επειδή οι δύο εκτατικές ποσότητες που σχηματίζουν την εντατική ποσότητα αναπαριστούν διαφορετικά είδη ποσοτήτων – χρήμα και βάρος, χρήμα και ώρα, λίτρα και απόσταση – τα παιδιά θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι, όταν η μια ποσότητα αυξάνεται ή μειώνεται θα πρέπει και η άλλη ποσότητα να αυξάνεται και να μειώνεται αντίστοιχα. Οι εντατικές ποσότητες, δηλαδή, εκφράζουν λόγους και κατά συνέπεια αποτελούν καταστάσεις αναλογίας. Όπως επισήμανε και ο Piaget (1952), οι καταστάσεις της αναλογίας είναι δύσκολες.

Με βάση τη διαίρεση οι φυσικοί και ακέραιοι αριθμοί επεκτείνονται σε νέου τύπου αριθμούς – τα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τα ποσοστά – που αποτελούν τους ρητούς αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί είναι πολύ χρήσιμοι και συναντώνται συχνά στην καθημερινότητα, ως αποτελέσματα μετρήσεων. Οι ρητοί αριθμοί διαθέτουν ιδιότητες που δεν υπάρχουν στους φυσικούς και ακέραιους αριθμούς. Για παράδειγμα, στους φυσικούς αριθμούς μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών δεν υπάρχει άλλος αριθμός (π.χ. μεταξύ του 6 και 7), ενώ στους ρητούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί (π.χ. μεταξύ του 0,6 και 0,7). Στους ρητούς αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας αριθμός – όπως συμβαίνει με τους ακεραίους – που είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός. Αυτά τα νέα χαρακτηριστικά των ρητών αριθμών αποτελούν σημεία δυσκολίας για τους μαθητές. Περισσότερα στοιχεία για τις δυσκολίες των μαθητών στους ρητούς αριθμούς παρουσιάζονται σε άλλο κείμενο.

Οι στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τι είναι γενικά οι νοερές στρατηγικές και ποια είναι τα χαρακτηριστικά τους. Οι νοερές στρατηγικές αποτελούν έναν ειδικό τύπο γνωστικών διαδικασιών. Αν και οι στρατηγικές ορίζονται με μικρές διαφορές από τους διάφορους ερευνητές, αυτές γενικά θεωρούνται ως νοητικές προσπάθειες και διαδικασίες με κατευθυνόμενο στόχο, που υιοθετούνται για να ενισχύσουν την συμπεριφορά της μνήμης. Οι στρατηγικές μπορούν να ελεγχθούν, εφαρμόζονται σκόπιμα από το άτομο και είναι δυνητικά διαθέσιμες στη συνείδηση (Naus & Ornstein 1983; Bjorkland & Douglas, 1997).

Οι στρατηγικές χρησιμοποιούνται για την ανάκληση πληροφοριών από την μακρόχρονη μνήμη, συνυπάρχουν με άλλες γνωστικές λειτουργίες και επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες. Το πιο σημαντικό, όμως, απ' όλα είναι ότι στρατηγικές αναπτύσσονται. Έχει παρατηρηθεί ότι η διαφορά ηλικίας επηρεάζει τον αριθμό των στρατηγικών που διαθέτουν παιδιά διαφορετικών ηλικιών, καθώς και την αποτελεσματικότητα με την οποία χρησιμοποιούν αυτές τις στρατηγικές (Bjorkland & Douglas, 1997).

Τα τελευταία τριάντα χρόνια έχουν γίνει πολλές έρευνες και καταγράφηκαν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στις τέσσερις πράξεις με φυσικούς και ρητούς αριθμούς.

Για να δούμε, όμως, πιο συγκεκριμένα και να μιλήσουμε για τις νοερές στρατηγικές παρουσιάζουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα από στρατηγικές που χρησιμοποιούν παιδιά και ενήλικες.

Στην πρόσθεση 5+6 από παιδιά της Α΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου μπορεί να έχουμε τις εξής απαντήσεις: Κάποιο παιδί μπορεί να ξεκινήσει να απαριθμεί με τη βοήθεια αντικειμένων (κυβάκια) ένα σύνολο από 5 κυβάκια, (1, 2, 3, 4, 5), ένα σύνολο από 6 κυβάκια, μετά να τα βάλει μαζί και να τα μετρήσει από την αρχή όλα. Αυτή είναι μια αρχική στρατηγική που ονομάζεται *απαρίθμηση όλων*. Ένα άλλο παιδί μπορεί να ξεκινήσει από το 6 και να ανέβει 5 βήματα 6, 7, 8, 9, 10, 11. Αυτή είναι η στρατηγική *αρίθμηση από το μεγαλύτερο*. Ένα τρίτο παιδί λέει ότι 6=5+1, άρα το 5+6=5+5+1=11. Αυτό το παιδί ανακάλεσε από τη μνήμη του και υπολόγισε με τα αριθμητικά γεγονότα 6=5+1, 5+5=10 και 10+1=11. Χρησιμοποίησε, δηλαδή, μια κατασκευαστική στρατηγική *κοντά στα διπλά*. Ένας ενήλικας υπολογίζει το άθροισμα 5+6 με άμεση ανάκληση του αριθμητικού γεγονότος από την μακρόχρονη μνήμη.

Στην πρόσθεση 46+23 σε μαθητές της Γ΄ τάξης, μεταξύ άλλων, μπορούμε να έχουμε τις εξής απαντήσεις: Ένας μαθητής ξεκινάει από το 46 και προσθέτει 20 οπότε έχει 66 και στο 66 προσθέτει άλλα 3, οπότε έχει 69. Είναι η στρατηγική της *συσσώρευσης, N10*. Ένας άλλος μαθητής είπε: 6 και 3 κάνει 9, 4 και 2 ίσον 6, άρα 69. Αυτός ο μαθητής έκανε νοερά τον γραπτό αλγόριθμο της πρόσθεσης.

Με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τις απαντήσεις των μαθητών και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

Μια πρώτη και προφανής παρατήρηση είναι ότι για μια ίδια πράξη, όπως εδώ π.χ. με το 5+6, μπορούμε να έχουμε διάφορες στρατηγικές υπολογισμού από διαφορετικά παιδιά. Αλλά και από ένα ίδιο παιδί μπορούμε να έχουμε διαφορετικές στρατηγικές για την ίδια πράξη. Οι στρατηγικές αυτές μπορεί να χαρακτηριστούν από τον χρόνο που απαιτούν, αλλά δείχνουν και το επίπεδο του παιδιού σε αριθμητικές ικανότητες, όπως τη χρήση των αριθμών, των ιδιοτήτων του συστήματος αρίθμησης και τους υπολογισμούς, δηλαδή την αίσθηση του αριθμού. Στο παράδειγμα 5+6, η στρατηγική *αρίθμηση από το μεγαλύτερο* είναι πιο γρήγορη και πιο έξυπνη από τη στρατηγική *απαρίθμηση όλων* και η κατασκευαστική στρατηγική *κοντά στα διπλά* πιο γρήγορη και πιο έξυπνη από τις δύο άλλες. Οι δύο πρώτες στρατηγικές βασίζονται στην απαρίθμηση και αρίθμηση αντίστοιχα, ενώ η τελευταία στην ανάκληση αριθμητικών γεγονότων και υπολογισμό στην βραχύχρονη μνήμη.

Οι στρατηγικές των μαθητών μπορούν να αλλάζουν και προσαρμόζονται σε μια πράξη ανάλογα με το μέγεθος των αριθμών, σε αντίθεση με τους γραπτούς αλγόριθμους, όπου χρησιμοποιείται η ίδια μέθοδος σε όλες τις περιπτώσεις. Η ικανότητα αυτή αλλαγής στρατηγικής ανάλογα με τα δεδομένα της πράξης είναι η *ευελιξία* που θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση 46+23 μπορεί να ταιριάζει η στρατηγική της *συσσώρευσης, N10,* αλλά στην πράξη 49+23 είναι πιο γρήγορη και έξυπνη η *ολιστική στρατηγική της αντιστάθμισης,* όπου του 49 γίνεται 50 και αφαιρείται 1 από το αποτέλεσμα 49+23=50+23-1=72.

Για το θέμα των στρατηγικών ο Threlfall (2002, σελ. 30) δηλώνει ότι οι απαντήσεις σε προβλήματα νοερού υπολογισμού μπορεί να προκύψουν από διαφορετικούς τρόπους, από τους οποίους δεν είναι όλοι εξίσου κατάλληλοι για τις πιο μακροπρόθεσμες ανάγκες. Τα παιδιά μπορεί να απαντήσουν σωστά:

1. Με την ανάκληση ή 'απλά γνωρίζοντας' ένα αριθμητικό γεγονός.
2. Με μια απλή διαδικασία καταμέτρησης, όπου στην ακολουθία των αριθμών απαγγέλλονται όλοι οι αριθμοί ένας προς έναν, ενώ η καταμέτρηση παρακολουθείται από τα ίχνη των βημάτων.
3. Με το να κάνει μια νοερή αναπαράσταση της μεθόδου με 'χαρτί και μολύβι' (συνήθως ένα άθροισμα που παρουσιάζεται κάθετα) και να δουλέψει νοερά τη διαδικασία.
4. Με την κατασκευή μιας ακολουθίας μετασχηματισμών των αριθμών του προβλήματος για να καταλήξει σε μια λύση. Για παράδειγμα, για να προσθέσει 36 και 28, πρώτα προσθέτει 20 στο 36 (κάνει 56) μετά σκέφτεται το υπόλοιπο 8 να προστεθεί ως δύο τεσσάρια, προσθέτει το πρώτο τέσσερα για να γίνει 60, μετά προσθέτει το τέσσερα που έμεινε για να φτάσει στο 64 που είναι η απάντηση.

Ο Threlfall αναφέρει ότι οποιαδήποτε από αυτές τις απαντήσεις μπορεί να δώσει το σωστό αποτέλεσμα, αλλά οι προσεγγίσεις του τέταρτου είδους, που συχνά αναφέρονται ως *στρατηγικές*, συνήθως θεωρούνται ζωτικής σημασίας για τις ευρύτερες ανάγκες του νοερού υπολογισμού. Ο Thompson (1999a, σελ. 2) προσδιορίζει τις *στρατηγικές* στους νοερούς υπολογισμούς ως εξής: «*Οι νοερές στρατηγικές είναι περισσότερο η εφαρμογή γνωστών ή γρήγορα υπολογίσιμων αριθμητικών γεγονότων, σε συνδυασμό με ειδικές ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, για να βρεθεί η λύση ενός υπολογισμού του οποίου η απάντηση δεν είναι γνωστή. Επίσης, οι νοερές στρατηγικές ενσωματώνουν την ιδέα ότι τα παιδιά, με δεδομένη μια συλλογή από αριθμούς για να εργαστούν, θα επιλέξουν την στρατηγική που είναι η πιο κατάλληλη για τους συγκεκριμένους αριθμούς*».

Σε έρευνες φαίνεται ότι οι άνθρωποι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές στην ίδια πράξη, που παρουσιάζεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Έτσι αρκετοί μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές στο ίδιο πρόβλημα, όταν δίνεται σε δύο διαφορετικές ημέρες (Siegler, & Shrager, 1984). Μπορεί να χρησιμοποιούν επίσης διαφορετικές στρατηγικές για να λύσουν ένα ίδιο πρόβλημα που τους δίνεται δύο φορές την ίδια μέρα (Siegler, 1995; Wilkinson, 1982).

Οι γραπτοί αλγόριθμοι και οι διαφορές τους με τις νοερές στρατηγικές

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε και θα παρουσιάσουμε την λειτουργία των γραπτών αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων με φυσικούς αριθμούς και τη σχέση τους με τους νοερούς υπολογισμούς. Είναι ένα σημαντικό θέμα για το οποίο γίνεται πολλή συζήτηση και επηρεάζει σημαντικά τη διδασκαλία. Αρκετοί συγγραφείς που αναλύουν τη λειτουργία των γραπτών αλγορίθμων (Plunkett, 1979; Thomson 1997; Usiskin 1998) αναφέρουν θετικά τους χαρακτηριστικά, όπως:

- Αποτελούν παραδοσιακό περιεχόμενο των στοιχειωδών μαθηματικών σε όλο τον κόσμο για πολλά χρόνια.
- Είναι ισχυροί στην επίλυση κατηγοριών προβλημάτων, ειδικά όταν οι υπολογισμοί περιέχουν πολλούς αριθμούς και η μνήμη μπορεί να επιβαρύνεται πολύ.
- Είναι αυτόματοι και μπορούν να διδάσκονται και να εκτελούνται από κάποιον χωρίς να απαιτείται να αναλύσει την βάση στην οποία στηρίζεται ο αλγόριθμος.
- Είναι γρήγοροι και κατευθύνονται απευθείας στην απάντηση.
- Παρέχουν μια γραπτή καταγραφή του υπολογισμού, επιτρέποντας σε εκπαιδευτικούς και μαθητές να εντοπίζουν οποιοδήποτε λάθος σε αυτούς.
- Αποτελούν μια αυθεντική, μόνιμη και σταθερή (αμετάβλητη) διαδικασία, η οποία χρησιμοποιείται για όλους τους αριθμούς: μονοψήφιους ή πολυψήφιους, ακέραιους ή δεκαδικούς.

Αν και τα παραπάνω χαρακτηριστικά των αλγορίθμων φαίνεται να αποτελούν ισχυρές αιτίες, ώστε αυτοί να διδάσκονται παραδοσιακά και να συνεχίζουν να διδάσκονται ακόμη και σήμερα, υπάρχει έντονος αντίλογος σε αυτό το θέμα. Ένας αριθμός ερευνητών βρίσκει ότι η διδασκαλία των αλγορίθμων των πράξεων με φυσικούς αριθμούς στη δημοτική εκπαίδευση είναι επικίνδυνη για τα παιδιά και κάνει κακό στην συγκρότηση των υπολογιστικών τους ικανοτήτων (Kamii & Dominick, 1997; 1998, McIntosh, 1998; Van de Walle, 2005α, 2005β). Οι ερευνητές αυτοί αναφέρουν αρκετές αιτίες δημιουργίας προβλημάτων από τη χρήση των αλγόριθμων, όπως οι παρακάτω:

- *Οι αλγόριθμοι βασίζονται στα ψηφία και όχι σε ολόκληρους τους αριθμούς, όπως οι νοεροί υπολογισμοί, και λειτουργούν από τα δεξιά προς τα αριστερά παρά από τα αριστερά προς τα δεξιά, που λειτουργούν οι νοεροί υπολογισμοί.*
  Στους αλγορίθμους των πράξεων παίρνονται τα ψηφία των αριθμών ξεχωριστά και μεμονωμένα το καθένα. Για παράδειγμα, στην κάθετη γραπτή πρόσθεση 46+35, προσθέτουμε από δεξιά προς τα αριστερά ξεχωριστά τα ψηφία (6+5=11, γράφουμε 1 και 1 το κρατούμενο, 1+4+3=8). Ενώ σε μια νοερή στρατηγική, για παράδειγμα του διαχωρισμού (1010), υπολογίζουμε: 40+30=70, 6+5=11, 70+11=81, ή της συσσώρευσης (N10): 46+30=76, 76+5=81. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν τις νοερές στρατηγικές χειρίζονται ολόκληρους τους αριθμούς και τους αναλύουν σύμφωνα με τη θεσιακή τους αξία στο σύστημα αρίθμησης σε αντίθεση με τους γραπτούς αλγορίθμους που επεξεργάζονται μεμονωμένα κάθε ψηφίο ανεξάρτητα από τη θεσιακή του αξία. Όπως δηλώνει και η Kamii, οι

αλγόριθμοι «ξεδιδάσκουν» τη θεσιακή αξία στο σύστημα αρίθμησης (Kamii & Dominick, 1998).
Επίσης, με εξαίρεση τη διαίρεση, οι αλγόριθμοι χειρίζονται τους αριθμούς από τα δεξιά προς τα αριστερά με ένα ψηφιοκεντρικό τρόπο και έτσι κρύβουν το αποτέλεσμα μέχρι το τέλος. Το αποτέλεσμα γίνεται φανερό μετά την ολοκλήρωση της πράξης.

- *Οι αλγόριθμοι είναι άκαμπτοι και γι' αυτό γίνονται μερικές φορές άσκοπα κουραστικοί.*
  Στους νοερούς υπολογισμούς οι στρατηγικές προσαρμόζονται κάθε φορά ανάλογα με τους αριθμούς στις πράξεις, για παράδειγμα χρησιμοποιείται άλλη στρατηγική για την αφαίρεση 52 – 49 και άλλη για την αφαίρεση 52 – 31. Αντίθετα, στους αλγορίθμους χρησιμοποιείται η ίδια μέθοδος σε όλα τα προβλήματα μιας πράξης. Έτσι, στην αφαίρεση 6000 – 15 με τον αλγόριθμο οι μαθητές είναι αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουν σειρά από κρατούμενα και αρκετοί από αυτούς να κάνουν λάθη.

- *Οι γραπτοί αλγόριθμοι διδάσκονται και επιβάλλονται από τη διδασκαλία.*
  Αν και οι διδακτικές μέθοδοι που προτείνονται σήμερα είναι μαθητοκεντρικές και βασίζονται στην κατανόηση και την ανακάλυψη, αυτές είναι δύσκολο να εφαρμοστούν κατά τη διδασκαλία των αλγορίθμων των πράξεων, όπως στην περίπτωση με τα κρατούμενα, την μετατόπιση μιας θέσης στο δεύτερο ψηφίο του πολλαπλασιασμού, τις επιμέρους πράξεις που κρύβονται, κτλ. Για παράδειγμα, πολλοί εκπαιδευτικοί μπορεί να παρατήρησαν ότι, όταν δίδασκαν τη γραπτή διαίρεση, χωρίς να το θέλουν, χρησιμοποίησαν μια εντελώς κατευθυνόμενη και δασκαλοκεντρική μέθοδο, όσο και αν ήθελαν να κινηθούν με επίκεντρο τους μαθητές. Σήμερα ωστόσο, σε σχέση με το παρελθόν, γίνεται προσπάθεια να δοθούν εξηγήσεις και να χρησιμοποιηθούν χειραπτικά υλικά για να γίνουν πιο κατανοητές οι γραπτές πράξεις. Παρόλα αυτά, όμως, οι γραπτοί αλγόριθμοι είναι δύσκολο να κατανοηθούν από τους μαθητές, σε αντίθεση με τις δικές τους επινοούμενες νοερές στρατηγικές.

- *Οι μαθητές κάνουν περισσότερα λάθη με τους αλγόριθμους παρά με τις δικές τους επινοούμενες στρατηγικές.*
  Αρκετές παλιές έρευνες (Ashlock, 1972; Cox, 1974; Brown & Burton, 1978) έδειξαν ότι οι μαθητές κάνουν πολλά λάθη, όταν εκτελούν τους γραπτούς αλγόριθμους. Τα λάθη αυτά εκτός από συχνά είναι και συστηματικά, δηλαδή εμφανίζονται κατ' επανάληψη και μπορεί να εξηγηθούν με βάση τα βήματα του αλγορίθμου. Αυτή η κανονικότητα που εμφανίζεται στα λάθη δείχνει ότι οι μαθητές επικεντρώνονται στο να θυμούνται τα βήματα του αλγορίθμου, χωρίς να τα καταλαβαίνουν και χωρίς να αποκτούν την αίσθηση του αριθμού. Τα πολλά και συστηματικά λάθη, δηλαδή, στους αλγορίθμους δείχνουν την έλλειψη κατανόησης από την πλευρά των μαθητών. Αντίθετα, οι μαθητές καταλαβαίνουν καλύτερα, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές που έχουν ανακαλύψει οι ίδιοι ή αυτές που απέκτησαν από κάποιο συμμαθητή τους.

Οι Kamii & Dominick (1997, σελ. 58) δηλώνουν ότι οι αλγόριθμοι είναι επιβλαβείς για την ανάπτυξη της αριθμητικής λογικής στα παιδιά για δύο λόγους: (α) «ξεδιδάσκουν» τη θεσιακή αξία και αποθαρρύνουν τα παιδιά να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού και (β) αναγκάζουν τα παιδιά να εγκαταλείψουν τη δική τους σκέψη. Ο φυσικός τρόπος στα παιδιά είναι να σκέφτονται τους αριθμούς από αριστερά προς τα δεξιά. Ωστόσο, οι αλγόριθμοι τους υποχρεώνουν να εγκαταλείψουν την αντίληψη αυτή και να λειτουργούν από τα δεξιά προς τα αριστερά και να χειρίζονται ξεχωριστά κάθε στήλη.

Πραγματοποιήθηκαν έρευνες που συνέκριναν την επίδοση και συμπεριφορά μαθητών που δεν διδάχτηκαν τους παραδοσιακούς αλγόριθμους με μαθητές που τους διδάχτηκαν. Οι μαθητές που δεν διδάχτηκαν αλγορίθμους παρακολούθησαν καινοτόμα προγράμματα, όπως το *Everyday Mathematics* ή το Investigations, και συγκρίθηκαν με μαθητές που παρακολούθησαν παραδοσιακά προγράμματα, που περιείχαν τη διδασκαλία των αλγορίθμων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που διδάχτηκαν με αυτά τα καινοτόμα προγράμματα –που δεν περιείχαν αλγορίθμους των πράξεων– απέδωσαν καλύτερα από τους συμμαθητές τους που διδάχτηκαν με τα παραδοσιακά προγράμματα στην κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων. Όσον αφορά τους πολυψήφιους υπολογισμούς, οι περισσότερες έρευνες βρίσκουν ότι οι μαθητές των καινοτόμων προγραμμάτων είναι περίπου στο ίδιο επίπεδο με τους μαθητές των παραδοσιακών προγραμμάτων ή τους ξεπερνούν (Campbell, 1996; Carroll, 2000; Fuson, 2003; Mokros, Berle-Carman, Rubin, and O'Neil, 1996; Riordan, & Noyce 2001).

Δεν έχει πολύ καιρό που οι νοεροί υπολογισμοί εισήχθησαν στην ελληνική εκπαίδευση (το 2006) αλλά τα προγράμματα και τα βιβλία, μέχρι σήμερα, δεν παρουσιάζουν τους νοερούς υπολογισμούς με μια σύγχρονη και συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας. Μέσα στα προγράμματα και τα βιβλία η σχέση των νοερών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων, καθώς και ο τόπος που αυτές οι δύο έννοιες αναπτύσσονται, δεν είναι ξεκάθαρη και συγκεκριμένη. Οι έλληνες εκπαιδευτικοί δεν έχουν επιμορφωθεί στα θέματα των νοερών υπολογισμών αλλά και της σχέσης τους με τους γραπτούς υπολογισμούς. Για τους παραπάνω λόγους, υπάρχουν ακόμη σήμερα πολλοί εκπαιδευτικοί που δίνουν υπερβολική σημασία και αφιερώνουν πολύ χρόνο στους γραπτούς αλγορίθμους, σε αντίθεση με τους νοερούς υπολογισμούς που παραβλέπουν και δεν ξέρουν να τους διδάξουν. Οι γραπτές πράξεις εισάγονται πολύ νωρίς σε σχέση με τους νοερούς υπολογισμούς και η διδασκαλία τους δεν αναδεικνύει και δεν αναπτύσσει τις άτυπες στρατηγικές των μαθητών. Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις, οι φωτοτυπίες των μαθητών για εργασία στο σπίτι είναι γεμάτες με μακροσκελείς και χρονοβόρες γραπτές πράξεις. Γνωρίζουμε ότι η πρόωρη εισαγωγή των γραπτών αλγορίθμων καθώς και η μη σωστή διδασκαλία των νοερών υπολογισμών δημιουργούν αρνητικές επιπτώσεις στις στρατηγικές που μαθαίνουν και χρησιμοποιούν οι μαθητές στην εκτέλεση των πράξεων.

Έρευνες (Cooper et al., 1996a, 1996b; Heirdsfield & Cooper, 1996) αναφέρουν την επιρροή της διδασκαλίας των γραπτών πράξεων στις αυθόρμητες νοερές στρατηγικές των παιδιών. Πριν από τη διδασκαλία των γραπτών πράξεων τα παιδιά παρουσιάζουν μια ποικιλία από αποτελεσματικές νοερές στρατηγικές, ενώ μετά τη διδασκαλία τα παιδιά έχουν την τάση να χρησιμοποιούν μια νοερή στρατηγική η οποία φαίνεται να αντανακλά τον γραπτό αλγόριθμο που δίδαξε ο δάσκαλος. Σύμφωνα με αυτά τα στοιχεία, οι ερευνητές (π.χ. Kamii, Lewis, & Jones, 1991; Reys et al., 1995) συμπεραίνουν ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ελεύθεροι να διατυπώνουν τις δικές τους νοερές στρατηγικές, καθώς η κατανόηση των αλγορίθμων βελτιώνεται, αν τα παιδιά κατασκευάζουν στρατηγικές στην κατεύθυνση των δικών τους φυσικών τρόπων σκέψης.

Βιβλιογραφία

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54,* 695-701.

Ashlock, Robert B. (1972). *Error patterns in computation.* Columbus, OH: Merrill.

Bjorkland, D.P., & Douglas, R.N. (1997). The development of memory strategies. In N. Cowan (Ed.), *The development of memory in childhood* (pp. 201-246). Hove, UK: Psychology Press.

Boysen ST, Berntson GG. (1989). Numerical competence in a chimpanzee (*Pan troglodytes*). *Journal of Comparative Psychology*, *103*: 23-31.

Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, *83*, 223–240.

Brown, S., & Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2,* 155-192.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry 46,* 3–18*.*

Campbell, P. F. (1996). Empowering children and teachers in the elementary mathematics classrooms of urban schools. *Urban Education, 30,* 449–475.

Carroll ,W. M. (2000). Invented computational procedures of students in a standards-based curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2): 111-121.

Carpenter, T.P., & Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (vol. LEA, pp. 9-24). Hillsdale, NJ: LEA.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M., & Irons, C. J. (1996a). Children’s mental strategies for addition and subtraction word problems. In: J. Mulligan, & M. Mitchelmore (Eds.), *Children’s number learning* (pp. 147-162). Adelaide, SA: Australian Association of Mathematics Teachers, Inc.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M., & Irons, C. J. (1996b). Years 2 and 3 children’s correct-response mental strategies for addition and subtraction word problems and algorithmic exercises. In: L. Puig, & A. Guiterrez (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 20, No. 2, pp. 241-248). Valencia, Spain: University of Valencia.

Cox, L. S. (1974). Analysis, classification, and frequency of systematic error computational patterns in the addition, subtraction, multiplication and division vertical algorithms for grades 2-6 and special education classes. *Research in Education, 9,* 130-131.

Fisher, J.P. (1992). *Apprentissages numeriques*. Nancy: Presses Universitaires de Nancy.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (2003). Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuson, K., & Hall, J.W. (1983). The acquisition of early number word meaning: A conceptual analysis and review. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New-York: Academic Press.

Fuson, K.C., & Kwon, Y. (1992). Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.P. Fisher (Eds.), *Pathways to number, children's developing numerical abilities*. Hillsdale, NJ: LEA.

Fuson, K. C, Richards, J. and Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the nomber word sequence. In C. Brainerd (Ed), *Progress in cognitive development.* (Vol 1). Children's logical and mathematical cognition. New-York: Springer-Verlag.

Geary, DC., (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition: implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist 50*: 24-37.

Gelman, R., & Gallistel, C.-R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21,* 27–37.

Ginsburg, H. P. (1982). The development of addition in the contexts of culture, social class, and race. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 191–210). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities, 30,* 20-33.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (1996). The 'ups' and 'downs' of subtraction: young children's additive and subtractive mental strategies for solutions of subtraction word problems and algorithmic exercises. In: P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in* *mathematics education. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 261–268). Melbourne, Vic.: Deakin University Press.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Jones, S. (1991). Reform in primary education: a constructivist view. *Educational Horizons, 70*(1), 19-26.

Kamii, C. K. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior, 16,* 51-61.

Kami, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1 – 4. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Klein, A., & Starkey, P. (1988). Universals of early arithmetic cognition. *New Directions for Child Development, 41,* 5-26.

Λεμονίδης, Χ. (1994). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής.* Εκδόσεις Αδελφών Κυριακίδη, Θεσ/νίκη.

Λεμονίδης, Χ. (2000). *Στοιχεία Αριθμητικής και θεωρίας Αριθμών για το δάσκαλο*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*. Αθήνα: *Πατάκης.*

Naus, M. J. & Ornstein, P. A. (1983). Development of memory strategies: Analysis, questions, and issues. In M.T.H. Chi (Ed.), *Trends in memory development research.* New York: Karger.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. J. Morow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 yearbook.* (pp.44-48). Reston, VA: NCTM.

Mokros, J., Berle-Carman, M., Rubin, A., & O'Neil, K. (1996). *Learning operations: Invented strategies that work*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York, NY.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), 2-5.

Potter, M.C., & Levy, E.I. (1968). Spatial enumeration without counting. *Child Development, 39*, 265-272.

Resnick, L. B. (1989). *Developing mathematical knowledge*. American Psychologist, *44*, 162-169.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(4), 304-326.

Riordan, J., and P. Noyce. (2001). The impact of two standards-based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education 32*(4):368-98.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S. (1995). How does change occur: A micro genetic study of number conservation. *Cognitive Psychology, 28,* 225-273.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sophian, C., Wood, A. M., & Vong, K. I. (1995). Making numbers count: The early development of numerical inferences. *Developmental Psychology, 31*, 263-273.

Starkey, P., & Cooper, R.G., (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210*, 1033-1035.

Starkey, P., & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 99–116). Hillsdale, NJ: LEA.

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, 97-128.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged? In I. Thomson (Ed.), *Teaching and Learning Early Number* (pp. 97-109). Buckingham, UK, Open University Press.

Thompson, I. (1999a). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School*. November, 2-4.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50***,** 29–47.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 yearbook* (pp. 7-20). Reston, VA: NCTM.

Wilkinson, A. C. (1982). Partial knowledge and self-correction: Developmental studies of a quantitative concept. *Developmental Psychology, 18*, 876-893.

Wynn, K. (1990). Children’s understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-751.

Van de Walle, J. A. (2005α). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία,* Τυπωθήτω – Γ. Δάρδανος, Αθήνα.

Van de Walle (2005β). Do We Really Want To Keep the Traditional Algorithms for Whole Numbers? Draft Version – Copyright John Van de Walle, April 2005. Published in website: http://sd20numeracy.wikispaces.com/file/view/no_algorithms.pdf