ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

Άνοιξη 2007

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσης ενότητας ασκήσεων είναι η αφομοίωση των εισαγωγικών παραδόσεων του μαθήματος «Υπόγεια Υδραυλική», της σύνδεσης της ύλης παραδόσεων μικρότερων ετών με προβλήματα που συνδέονται με υπόγειες ροές, αλλά και την επεξεργασία βιβλιογραφικών αναφορών που είχαν προταθεί στην παράδοση.

Α) Γενικές ερωτήσεις

1) Ποια είναι προσέγγιση του ισοδύναμου συνεχούς; Τι σημαίνει Α.Σ.Ο.; Κάντε ένα επεξηγηματικό σκαρίφημα. Περιγράψτε σύντομα τα προβλήματα τα οποία θα προκύψουν προσδιορισμού του Α.Σ.Ο. στην περίπτωση ενός φυσικού γεωλογικού σχηματισμού;

2) Πως ορίζουμε (κατά κανόνα) το πιεζομετρικό φορτίο:

Σε εφαρμογές αστικής υδραυλικής;
Σε εφαρμογές υπόγειες υδραυλικής;

Εξηγείστε τις (ενδεχόμενες) διαφορές.

Ποια μονάδα χρησιμοποιούμε συνήθως για την μέτρηση του πιεζομετρικού φορτίου;

Περιγράψτε τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε συνήθως για τη μέτρηση του πιεζομετρικού φορτίου σε φυσικούς γεωλογικούς σχηματισμούς.

3) Γράψτε τον νόμο του Νταρσύ:

2^{α}) Για την περίπτωση μονοδιάστατης ροής
2β) Στην γενικευμένη του μορφή (περίπτωση ισότροπου μέσου).

Ποιες είναι οι προϋποθέσεις για να ισχύει;

4) Κατά την γνώμη σας είναι πιο πιθανό να ισχύει ο νόμος του Νταρσύ για την περίπτωση ενός χαλαρού ή ενός συνεκτικού γεωλογικού σχηματισμού;

5) Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα Νταρσύ και στην ταχύτητα κίνησης ενός συντηρητικού ρύπου;

6) Περιγράψτε σύντομα ένα πείραμα για τον προσδιορισμό της υδραυλικής αγωγιμότητας σε πορώδη μέσα. Κάντε ένα επεξηγηματικό σκαρίφημα.

Ποια μεγέθη πρέπει να μετρήσουμε; Πως γίνονται οι μετρήσεις των παραπάνω μεγεθών;

7) Γράψτε μία γενικευμένη μορφή της εξίσωσης του Νταρσύ. Σε ποια περίπτωση η εξίσωση αυτή ανάγεται στην εξίσωση του Νταρσύ;

Β) Προσομοίωση υπόγειων ροών

1) Αναφέρατε μερικές περιπτώσεις στις οποίες η προσομοίωση των υπόγειων ροών είναι απαραίτητη
2) Κατά κανόνα ποιες μαθηματικές οντότητες επιλύουν τα μαθηματικά μοντέλα προσομοίωσης υπόγειων ροών;
3) Πως μπορείτε να ελέγξετε την αξιοπιστία ενός λογισμικού για την προσομοίωση υπόγειων ροών;
4) Αναφέρατε ορισμένα τυπικά βήματα τα οποία πρέπει να γίνουν πριν την εφαρμογή και αξιοποίηση ενός μοντέλου προσομοίωσης

Γ) Οικολογικά μοντέλα

Ορισμένα απλοποιημένα οικολογικά συστήματα του τύπου «κυνηγός-θήραμα» μπορούν να προσομοιωθούν με ένα από τα παρακάτω συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

Περίπτωση (Χ)

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_1 y_2 \qquad (\text{Ια})$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_1 y_2 \qquad (\text{Ιβ})$$

Περίπτωση (Υ)

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1(3 - y_1 - y_2) \qquad (\text{ΙΙα})$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2(y_1 - 1) \qquad (\text{ΙΙβ})$$

1) Μπορείτε να ερμηνεύσετε τις μεταβλητές και τους όρους των παραπάνω συστημάτων;
2) Ποιες αρχικές ή οριακές συνθήκες πρέπει να θέσουμε στα παραπάνω συστήματα;
3) Με ποια αριθμητική μέθοδο μπορούν να λυθούν τα παραπάνω συστήματα εύκολα και αξιόπιστα;

Δ) Μοντελοποίηση υπόγειων ροών

1) Για ποιο λόγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι συνήθως οι υπόγειες ροές είναι οριζόντιες; Αναφέρατε δύο περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν ισχύουν οι παραπάνω κανόνες – κάντε τα σχετικά σκαριφήματα
2) Η εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνηση ρευστού για την περίπτωση δισδιάστατης, νταρσιανής ροής μπορεί να γραφεί με τις εξής μορφές:

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right) + R$$

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + R$$

όπου S ένας κατάλληλος συντελεστής αποθηκευτικότητας, h το πιεζομετρικό φορτίο (ή ενδεχομένως ισοδύναμα το βάθος ελεύθερης ροής), Τ η μεταφορικότητα, Κ η υδραυλική αγωγιμότητα, R ο όρος πηγή καταβόθρα

Απαντήστε στις εξής ερωτήσεις

α) Ποια από τις δύο εξισώσεις αναφέρετε σε υδροφορείς υπό πίεση ποια σε φρεάτιους υδροφορείς;

β) Ποια από τις δύο εξισώσεις είναι μη γραμμική; Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να γραμμικοποιηθεί; Ποιες διαφορές έχει από ην ομόλογη της γραμμική σε περίπτωση γραμμικοποίησης;

γ) Από τι εξαρτάται ο όρος πηγή ή καταβόθρα R; Πότε αυτός ο όρος είναι θετικός πότε αρνητικός; Είναι δυνατόν αυτός ο όρος να είναι μηδενικός;

δ) Πως απλοποιούνται οι παραπάνω εξισώσεις για την περίπτωση ομογενούς και ισότροπου υδροφορέα;

ε) Περιγράψτε μία περίπτωση κατά την οποία το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθούν μονοδιάστατο. Γράψτε τις εξισώσεις για την κίνηση του ρευστού για την περίπτωση αυτή. Πως μπορεί να απλοποιηθεί και άλλο το πρόβλημα αν θεωρήσουμε ο όρος πηγή ή καταβόθρα R μηδενικός;

3) Η κίνηση ρευστού (ομοιγενές μέσο, χωρίς στερεά φάση) η οποία προκαλείται από απότομη και στην συνέχεια σταθερή κίνηση πλάκας είχε εξεταστεί στο μάθημα της Ρευστομηχανικής για την περίπτωση ημιάπειρου μέσου και έρπουσας ροής: Για την περίπτωση σταθερού πεδίου πίεσης η υδραυλική συμπεριφορά στο παραπάνω πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial t} \qquad (\zeta\text{-}1\alpha)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$u(y,t)=0 \text{ για } t<0 \tag{ζ-1β}$$

και οριακές συνθήκες

$$u(y=0,t)=U \text{ για } t\geq 0 \tag{ζ-1γ}$$
$$u(y\to\infty,t)=0 \text{ για } t\geq 0 \tag{ζ-1δ}$$

όπου *u* η ταχύτητα του ρευστού παράλληλα στην πλάκα, *y* η απόσταση κάθετα στην πλάκα, *t* ο χρόνος, *ν* το κινηματικό ιξώδες, και U η ταχύτητα της πλάκας.

Όπως είχε παρουσιαστεί στην παράδοση της Ρευστομηχανικής η λύση τοης εξίσωσης (ζ-1) είναι η εξής:

$$\frac{u(y,t)}{U}=1-erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \tag{ζ-2}$$

Ενώ η απόσταση *δ* που διανύει η διαταραχή μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\delta=3\sqrt{\nu t} \tag{ζ-3}$$

όπου *ν* το ιξώδες και *t* ο χρόνος.

3α) Περιγράψτε σύντομα (μία πρόταση) τη μέθοδο η οποία είχε χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της (ζ1). Ποια άλλη μέθοδος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί;

3β) Λαμβάνοντας υπόψη και της απαντήσεις σας στις προηγούμενες ερωτήσεις περιγράψτε ένα πρόβλημα υδραυλικής του οποίου η αναλυτική λύση μπορεί να βρεθεί με βάση τα παραπάνω. Ποια είναι η μορφή της λύσης αυτής

4) Θέλουμε να εξετάσουμε τις μεθόδους προσομοίωσης σε υπόγειο γεωλογικό σχηματισμό. Οι συνθήκες είναι τέτοιες έτσι ώστε να ισχύει η υπόθεση μονοδιάστατης νταρσιανής ροής, οι ιδιότητες το υδροφορέα είναι ομοιόμορφες ($T=10^{-3}m^2/s$, $S=10^{-3}$) ενώ ισχύει η υπόθεση ότι η εξίσωση της συνέχειας μπορεί να θεωρηθεί γραμμική. Οι όροι πηγή καταβόθρα μπορούν να θεωρηθούν μηδενικοί.

Θεωρούμε ότι ενώ αρχικά δεν λάμβανε χώρα ροή στον εξεταζόμενο υδροφορέα, στην συνέχεια ο γεωλογικός σχηματισμός τροφοδοτήθηκε λόγω απότομης ανόδου της στάθμης της λίμνης κατά ένα μέτρο, η οποία έμεινε στην συνέχεια σταθερή. Το μήκος του υδροφορέα κατά την διεύθυνση της ροής (κάθετα στην όχθη της λίμνης) είναι ίσο με 10km.

Μπορείτε να απαντήσετε εάν ισχύει η υπόθεση ημιάπειρου μέσου:

i) Για διάστημα δύο μηνών από την έναρξη του φαινομένου
ii) Για διάστημα ενός έτους από την έναρξη του φαινομένου

Σε ποιά μορφή μπορεί να γραφεί η λύση της παραπάνω εξίσωσης σε περίπτωση κατά την οποία ο υδροφορέας δεν μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρος;

5) Στην δημοσίευση *"A Simple Analytical Solution for the Boussinesq One-Dimensional Groundwater Equation", P.K. Tolikas, E. G. Sidiropoulos and C.D. Tzimopoulos, Water Res. Res., vol. 20, (1) 24-28, 1984*, είχε εξεταστεί το πρόβλημα που περιγράφτηκε στην προηγούμενη άσκηση, για την περίπτωση μη γραμμικής μορφής της εξίσωσης της συνέχειας.

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

5-1) Ποια είναι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα;

5-2) Με ποια μεθοδολογία η παραπάνω διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε κανονική διαφορική εξίσωση; Ποια είναι η εξίσωση αυτή;

5-3) Ποια βασική ιδιότητα της κανονικής διαφορικής εξίσωσης που γράψατε παραπάνω ισχύει μόνο για την περίπτωση της ανόδου της στάθμης της λίμνης (ή ποταμού) που συνορεύει με τον υδροφορέα αλλά δεν ισχύει για την περίπτωση αντίστοιχης ταπείνωσης της στάθμης; Με ποια εξίσωση περιγράφουν οι συγγραφείς την ιδιότητα αυτή ποσοτικά; Πως χρησιμοποιούν οι συγγραφείς την παραπάνω ιδιότητα για την κατασκευή αναλυτικής λύσης;

5-4) Εκτός από την αναλυτική επίλυση του προβλήματος, οι Tolikas et al. (1984) επιλύουν την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του ρευστού και αριθμητικά.

5-4α) Ποια αριθμητική μέθοδο είχαν χρησιμοποιήσει; Σε ποιο άλλο πρόβλημα είχατε συναντήσει την εφαρμογή αυτής της μεθόδου;
5-4β) Ποιος μετασχηματισμός είναι απαραίτητος για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής;
5-4γ) Τι πρόβλημα υπάρχει σχετικά με τις οριακές συνθήκες; Πως το αντιμετωπίζουν οι συγγραφείς;

5-5) Ποια προσέγγιση προτείνουν οι συγγραφείς για την γραμμικοποίηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή την αναγωγή της στο πρόβλημα που είχε εξεταστεί στην προηγούμενη άσκηση); Πως εκτιμώνται οι αποκλίσεις ανάμεσα στις δυο προσεγγίσεις;