ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ-ΟΜΑΔΑ Β

1 Θέμα ο

(4.75 Μονάδες)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία άπειρη επίπεδη πλάκα εμβαπτισμένη σ' έναν άπειρο χώρο ρευστού.

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο t=0 η πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα U πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται.
Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{f}$ θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες y και z (v και w) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση z θεωρούνται μηδενικές.

Ερωτήσεις

α) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή u (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση x)

β) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u για y=0 (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα). Δεδομένου ότι το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρο, ποια δεύτερη οριακή συνθήκη μπορούμε να χησιμοποιήσουμε;

γ) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

δ) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

δα-Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του x.
δβ- Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση είναι συνάρτηση μόνο του y.

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση γ)

ε) Παίρνοντας υπόψη σας τα παραπάνω γράψτε μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για την u στην οποία να εμφανίζονται μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

ζ)Υποθέτουμε ότι η λύση για την u έχει τη μορφή:

$u = Uf(\theta)$ (Ια)

όπου $\theta = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu \ t}}$ (Ιβ)

στην (Ιβ) ν είναι το κινηματικό ιξώδες.

Με την βοήθεια των σχέσεων (Ια) και (Ιβ) η εξίσωση με μερικές παραγώγους που είχαμε βρει στην ερώτηση ε) μετατρέπεται στην κανονική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 2\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Μετατρέψτε τις αρχικές και οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u –βλέπε ερωτήσεις (α και β)- στις κατάλληλες (αρχικές ή οριακές) συνθήκες για την εξίσωση f(θ)

η) Για ποιο λόγο η μετασχηματισμοί (Ια) και (Ιβ) δεν είναι ενσεδειγμένοι για την περίπτωση που το πεδίο ροής είναι πεπερασμένο κατά την διεύθυνση y (π.χ. από μία δεύτερη παράλληλη πλάκα σε απόσταση h;

θ) Επιλύστε την εξίσωση *(II)* θέτοντας $\bar{f} = \dfrac{df}{d\theta}$ και ολοκληρώνοντας δύο φορές. Προσδιορίστε τις σταθερές ολοκλήρωσης παίρνοντας υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση ζ.

ι) Γράψτε την αναλυτική μορφή για την *u*

κ) Θα ίσχυε η παραπάνω λύση (βλέπε απάντηση στην ερώτηση ι) αν παράλληλα στην πλάκα που αναφέραμε είχαμε μία δεύτερη (ακίνητη) πλάκα σε απόσταση *h*; Αν ναι για ποιες περιπτώσεις;

2ο Θέμα

(0.75 Μονάδες)

Εξετάζουμε τη ροή αυμπίεστου νευτώνειου ρευστού απάνω από επίπεδη πλάκα.

Ποια από τις απλοποιημένες μορφές της εξίσωσης Navier-Stokes είναι κατάλληλη για το πρόβλημα αυτό;

Μορφή Ι

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Μορφή 2

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

Μορφή 3

$$-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0$$

Αιτιολογείστε σύντομα την απάντηση σας.

Με ποιο φαινόμενο σχετικό με την διαχείριση των υδατικών πόρων σχετίζεται η ορθή διατύπωση του παραπάνω πρόβλημα;