



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ
ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΕΥΤΥΧΙΑ Η. ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, από τον Μάρτιο του 2009 μέχρι τον Αύγουστο του 2014, με επιβλέποντα τον Καθηγητή Ιωάννη Γ. Στρατή. Έναν άνθρωπο που ήθελα να ευχαριστήσω θερμά που πριν χρόνια με έκανε να ενθουσιαστώ με τις διαφορικές εξισώσεις και η συνάντησή μας στο μεταπτυχιακό να ενδυναμώσει αυτόν τον ενθουσιασμό για περαιτέρω έρευνα. Με στήριξε και με ενθάρρυνε παρά τις αρκετές δύσκολες και αποθαρρυντικές στιγμές αυτής της πορείας. Χρωστάω όμως και ένα μεγάλο ευχαριστώ στον πατέρα μου Ηλία Αργυρόπουλου ο οποίος με βοήθησε. Μπαμπά σε ευχαριστώ πολύ για όλες αυτές τις ώρες στο τηλέφωνο και για τα μηνύματα που ανταλλάξαμε.

Στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή συμμετείχαν επίσης ο καθηγητής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών Αθανάσιος Γιαννακόπουλος και ο καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών Γεράσιμος Μπαρμπάτης, τους οποίους ευχαριστώ θερμά για την αμέριστη βοήθειά τους. Επίσης, ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον καθηγητή Χ. Αθανασιάδη (Τμήμα Μαθηματικών), τον καθηγητή Ν. Αλικάκο (Τμήμα Μαθηματικών), την καθηγήτρια Κ. Κυριάκη (Τμήμα ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ) και τον καθηγητή Ν. Φραντζεσκάκη (Τμήμα Φυσικών).

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ), Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ, Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου. Ευχαριστώ επίσης, το Πρόγραμμα « Ηράκλειτος » για την τρίχρονη υποτροφία για τις διδακτορικές μου σπουδές που χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα ΕΣΠΑ 2007-2013.

Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω τον φίλο Ανδρέα Ιωαννίδη για την πολύτιμη βοήθεια του και την συνεργασία μας. Με βοήθησε να μάθω συναρτησιακή ανάλυση και πολλά όμορφα ακόμη Μαθηματικά. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Κώστα Λιάσκο για την σύντομη αλλά ουσιαστική συνεργασία μας τους τελευταίους μήνες. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Francois Murat (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)) για χρήσιμες συζητήσεις.

Να ευχαριστήσω επίσης την μητέρα μου, Γεωργία και την αδερφή μου, Αγγελική για όλη τους την υπομονή και κυρίως ψυχολογική υποστήριξη αυτά τα χρόνια των σπουδών μου. Από τις γενικές μεταπτυχιακές εξετάσεις για αυτό το διδακτορικό μέχρι σήμερα. Ήταν αρκετές οι φορές που τα δικά τους λόγια μου έδιναν κουράγιο να συνεχίσω.

Τέλος, μια συγνώμη και ένα ευχαριστώ στον σύζυγό μου, Νίκο Παπασταμόπουλο.

Ευτυχία

Εισαγωγή

Τα σύνθετα υλικά περιέχουν άριστα αναμειγμένα συστατικά, τα οποία πιθανώς παρουσιάζουν μια καλά ορισμένη δομή, συναντώνται σχεδόν παντού, είτε σε φυσικές δομές είτε σε κατασκευασμένα υλικά (π.χ ξύλα, μέταλλα, κόκκαλα, πέτρες ή τσιμέντο, κεραμικά, αφρούς κ.τ.λ). Κατασκευάζονται έτσι ώστε να έχουν συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες που δεν παρουσιάζουν κάποια ομοιογενή μέσα. Τα μέσα που χρησιμοποιούνται στον ηλεκτρομαγνητισμό είναι συχνά σύνθετα υλικά.

Η εξέλιξη των φυσικών φαινομένων σε σύνθετα υλικά μπορεί να μοντελοποιηθεί από Προβλήματα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) με περιοδική δομή. Αυτή η περιοδική δομή οδηγεί σε πολύπλοκες καταστάσεις τόσο στην αναλυτική όσο και στην υπολογιστική αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, ειδικά αν η περίοδος αυτής της δομής είναι μικρή συγκρινόμενη με το μέγεθος του πεδίου στο οποίο μελετάμε το σύστημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε ασυμπτωτική ανάλυση προκειμένου να πάρουμε μια απλούστερη περιγραφή του φαινομένου, η οποία μοντελοποιεί το σύνολο των ιδιοτήτων του υλικού.

Εάν ορίσουμε την παράμετρο $\varepsilon = \frac{\ell_m}{\ell_M}$ δηλαδή το πηλίκο των χαρακτηριστικών μεγεθών ℓ_m και ℓ_M των μικροδομών, τότε η ασυμπτωτική περιγραφή είναι έγκυρη καθώς το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$.

Αυτή η ασυμπτωτική θεωρία, η οποία βασίστηκε σε τυπικά ασυμπτωτικά αναπτύγματα σταδιακά εξελίχθηκε σε ισχυρή μαθηματική θεωρία, η οποία ονομάζεται ομοιογενοποίηση και στοχεύει στην εύρεση της μακροσκοπικής συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται αποδεικνύοντας ότι στο όριο καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ το φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί από ένα ΠΣΤ παρόμοιο με εκείνο του αρχικού προβλήματος αλλά με σταθερούς συντελεστές αντί για περιοδικούς. Αυτό σημαίνει ότι το μη-ομοιογενές υλικό αντικαθίσταται από ένα ομοιογενές κατασκεύασμα του οποίου οι συνολικές ιδιότητες είναι μια καλή προσέγγιση των αρχικών χαρακτηριστικών.

Άρα, η μέθοδος της ομοιογενοποίησης επιτρέπει τη μελέτη σύνθετων υλικών που συνδέεται άμεσα με τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών σε μέσα με περιοδική δομή. Αν η περίοδος της δομής είναι μικρή συγκρινόμενη με το μέγεθος του πεδίου στο οποίο λαμβάνει χώρα το φαινόμενο που μελετάμε, χρησιμοποιούμε ασυμπτωτική ανάλυση προκειμένου να βρούμε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της λύσης που εξαρτάται από μια μικρή παράμετρο.

Στόχος λοιπόν της ομοιογενοποίησης είναι η μελέτη της μακροσκοπικής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Από μαθηματικής απόψεως, οι λύσεις ενός προβλήματος συνοριακών τιμών με μη σταθερούς συντελεστές που εξαρτώνται από μια μικρή παράμετρο συγκλίνουν (με κατάλληλη έννοια) στη λύση ενός οριακού προβλήματος συνοριακών τιμών με σταθερούς συντελεστές, που μπορεί πλήρως να μελετηθεί.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τις (τοπικές ως προς το χρόνο) καταστατικές σχέσεις για ανομοιογενή χειρόμορφα υλικά με σταθερό μέτρο χειρομορφίας. Τέτοια υλικά έχουν σημαντικό φυσικό ενδιαφέρον (πολυμερή, μεταύλικά). Ένα τυπικό τέτοιο μοντέλο περιγράφει μια πολυστρωματική δόμηση από οπτικά ενεργά υλικά με αρκετά διαφορετικό δείκτη διάθλασης, αλλά λίγο διαφορετική παράμετρο χειρομορφίας ώστε να μπορεί θεωρηθεί σταθερή. Αν η εναλλαγή των υλικών γίνεται σε διαστάσεις πολύ μικρότερες του μήκους κύματος, τα ϵ και μ είναι συναρτήσεις της χωρικής (συνεχούς) μεταβλητής x και είναι σημαντικό να βρεθεί το αντίστοιχο effective (δηλ. ομοιογενές) υλικό. Η μελέτη αυτού του προβλήματος έγινε με την μέθοδο της «περιοδικής εκδίπλωσης».

Τέλος, ασχολούμαστε με το πρόβλημα διάδοσης χρονικώς αρμονικών (δηλ. με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$), όπου $\omega > 0$ είναι η κυκλική συχνότητα) ηλεκτρομαγνητικών πεδίων χωρίς πηγές, σε μια πλήρως αγωγίμη (δηλ. ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη $\hat{n} \times E = 0$ επί της επιφάνειας $\partial\Omega$, όπου \hat{n} είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$) κοιλότητα Ω (ανοιχτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3) με Lipschitz σύνορο, που περιέχει διανιστροπικό υλικό. Στο πρόβλημα αυτό έκανα μια πλήρη φασματική μελέτη.

Summary

The main objective of this thesis is the homogenization of partial differential equations (mainly Maxwell's equations) describing electromagnetic phenomena in complex media. In particular, we study the homogenization of Maxwell's equations focusing on the periodic unfolding method in complex media under Drude-Born-Fedorov type, local in time, constitutive relations.

Firstly, we formulate Maxwell's problem as an evolution initial value (Cauchy) problem in a Hilbert space supplemented with the constitutive relations of a bianisotropic medium (the most general linear medium in electromagnetics). Further, we analyze the notion of homogenization and we apply it as examples to equations of elliptic type in divergence form and to Maxwell's system in bianisotropic media.

We present also the method of periodic unfolding in the case of an elliptic partial differential equation and in the main part of this work we consider the problem of the well-posedness of the time-dependent Maxwell's equations in a Drude-Born-Fedorov type environment considering the fields to be elements of an appropriate Hilbert space. In order to prove the existence and uniqueness we apply the Faedo-Galerkin method and for the continuous dependence from the initial data we use semigroup theory for operators. The rest of the main part of the thesis deals with the homogenization of the considered problem, using the periodic unfolding method.

In the last chapter, we examine the time-harmonic Maxwell problem in a bianisotropic cavity, which we study by transforming it to an eigenvalue problem.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	iii
Εισαγωγή	v
Summary	vii
1 Ηλεκτρομαγνητισμός	1
1.1 Οι εξισώσεις Maxwell	1
1.2 Φορμαλισμός των προβλημάτων	4
1.3 Αξιώματα επί του υλικού	5
1.4 Ο καταστατικός νόμος και το πρόβλημα	7
2 Ομοιογενοποίηση των εξισώσεων Maxwell	9
2.1 Εισαγωγή	9
2.2 Ομοιογενοποίηση με τη μέθοδο της ασυμπτωτικής ανάπτυξης . .	10
2.2.1 Ομοιογενοποίηση εξισώσεων ελλειπτικού τύπου	11
2.2.2 Ομοιογενοποίηση εξισώσεων Maxwell σε διανιστροπικά υλικά	14
2.3 Ομοιογενοποίηση με τη μέθοδο του τελεστή περιοδικής εκδίπλωσης	18
2.3.1 Εισαγωγή	18
2.3.2 Μια περιοδική Γεωμετρία του \mathbb{R}^n	20
2.3.3 Ορισμός και Ιδιότητες του Τελεστή Περιοδικής Εκδίπλωσης	20
2.4 Ιδιότητες σύγκλισης του τελεστή εκδίπλωσης στον $L^p(\Omega)$. . .	27
2.4.1 Σύγκλιση διπλής κλίμακας	29
2.4.2 Ομοιογενοποίηση του ελλειπτικού προβλήματος (2.52) με τη βοήθεια του τελεστή εκδίπλωσης	31
3 Μέθοδος του « τελεστή περιοδικής εκδίπλωσης » σε DBF χειρόμορφο περιβάλλον	35
3.1 Εισαγωγή	35
3.2 Διατύπωση του προβλήματος	36

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3.2.1	Οι συναρτησιακοί χώροι του προβλήματος (3.11) και ο τελεστής DBF	38
3.2.2	Ο τελεστής DBF	38
3.2.3	Καλή τοποθέτηση του προβλήματος (3.11)	41
3.2.4	Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα . .	47
3.2.5	Ένας νόμος διατήρησης	51
3.3	Ομοιογενοποίηση	53
3.3.1	Διατύπωση του προβλήματος	53
3.3.2	Ασθενής - Ισχυρή σύγκλιση της λύσης του (P_h)	54
3.3.3	Συμπεράσματα	68
3.3.4	Σχόλιο για τη συνέχεια της λύσης u^ε ως προς β στο σημείο $\beta = 0$	69
4	Το φασματικό πρόβλημα σε μια διανισοτροπική κοιλότητα	71
4.1	Χρονικά Αρμονικά Πεδία	71
4.1.1	Χρονο-αρμονικές συναρτήσεις στο \mathbb{R}	71
4.1.2	Μιγαδική αναπαράσταση χρονο-αρμονικών συναρτήσεων	72
4.1.3	Μιγαδική αναπαράσταση χρονο-αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων	73
4.1.4	Μιγαδική αναπαράσταση πεδίων με μεταβαλλόμενο πλάτος	75
4.1.5	Χρονικές παράγωγοι πεδίων με μιγαδική αναπαράσταση .	75
4.1.6	Αρμονική αναπαράσταση εξισώσεων Maxwell	76
4.2	Διατύπωση	77
4.3	Το μαθηματικό πρόβλημα	78
4.4	Το γενικό πλαίσιο	80
4.5	Ιδιοσυχνότητες και τρόποι (modes) της διανισοτροπικής κοιλότητας	82
4.6	Συμπέρασμα	83
5	Παράρτημα	85
5.1	Στοιχεία από τη θεωρία των χώρων Sobolev	85
5.1.1	Μια γενική κατασκευή	85
5.1.2	Εφαρμογές	86
5.1.3	Ανακεφαλαίωση	88
5.2	Ο υπόχωρος $H_0^1(\Omega)$ του $H^1(\Omega)$	89
5.3	Οι υπόχωροι $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ και $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ του $H(\operatorname{div}; \Omega)$	91
5.4	Ο υπόχωρος $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ του $H(\operatorname{curl}; \Omega)$	93
5.5	Ο χώρος $W := H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega)$	95
5.5.1	Ο χώρος $W_{\operatorname{curl}} := \{u \in W : \operatorname{curl} u \in W\}$	95
5.5.2	Χρήσιμες ιδιότητες των στοιχείων των χώρων W και W_{curl}	96

Κεφάλαιο 1

Ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις Maxwell

Το 1873 ο Maxwell εδραίωσε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία όταν εξέδωσε την «*Treatise on Electricity and Magnetism*», στην οποία παρουσίασε τις εξισώσεις που σήμερα φέρουν το όνομά του. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούνται από δυο ζεύγη μερικών διαφορικών εξισώσεων με έξι πεδία. Προκύπτει βέβαια ότι οι εξισώσεις αυτές δεν είναι αρκετές για τον προσδιορισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Χρειάζονται κάποιες επιπλέον εξισώσεις, που λέγονται καταστατικές οι οποίες μοντελοποιούν τον τρόπο με τον οποίο τα πεδία αλληλεπιδρούν με το υλικό. Θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις Maxwell, ένα πρόβλημα και ορισμένα αξιώματα για τα υλικά.

1.1 Οι εξισώσεις Maxwell

Ένα ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο το οποίο λαμβάνει χώρα εντός ενός μέσου, το οποίο καταλαμβάνει μια περιοχή Ω του τρισδιάστατου χώρου \mathbb{R}^3 , περιγράφεται με τη βοήθεια των διανυσματικών μεγεθών ηλεκτρική διέγερση D , ένταση ηλεκτρικού πεδίου E , μαγνητική διέγερση B και ένταση μαγνητικού πεδίου H . Τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ και του χρόνου $t \in \mathbb{R}$. Αποτελούν δε άγνωστες ποσότητες, δε θεωρούνται δηλαδή τουλάχιστον όλες γνωστές εκ των προτέρων αλλά προκύπτουν ως λύση ενός κατάλληλα διατυπωμένου προβλήματος.

Κατά την εξέλιξη ενός ηλεκτρομαγνητικού φαινομένου όμως είναι δυνατό να υπάρχουν και γνωστές ποσότητες, οι οποίες εκφράζουν το περιβάλλον του συστήματος. Από μαθηματικής απόψεως, αυτές είναι ουσιαστικά οι παράμετροι του προβλήματος. Τέτοιες ποσότητες είναι το διανυσματικό μέγεθος πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος J_e και το βαθμωτό μέγεθος πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ρ_e .

Οι δύο νόμοι που καθορίζουν την αλληλεπίδραση του ηλεκτρικού και του

μαγνητικού πεδίου είναι ο νόμος του Ampère

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \operatorname{curl} H = -J_e$$

και ο νόμος του Faraday

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{curl} E = 0.$$

Οι νόμοι Ampère και Faraday εκφράζουν ακριβώς το γεγονός ότι ο ηλεκτρισμός και ο μαγνητισμός δεν είναι ανεξάρτητα ως δυναμικά φαινόμενα δηλαδή κινούμενα ηλεκτρικά φορτία δημιουργούν μαγνητικό πεδίο και σε αγωγό κινούμενο εντός μαγνητικού πεδίου εμφανίζεται κίνηση ηλεκτρονίων η οποία οφείλεται σε επαγωγή. Στη συνέχεια έχουμε δύο νόμους διατήρησης φορτίου. Αυτοί είναι ο ηλεκτρικός νόμος του Gauss

$$\operatorname{div} D = \rho_e$$

και ο μαγνητικός νόμος του Gauss

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Από τους δύο νόμους του Gauss προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Εφαρμόζοντας τον τελεστή της απόκλισης div στο νόμο του Ampère και με τη χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\operatorname{div} \operatorname{curl} u = 0$ και λόγω του ηλεκτρικού νόμου του Gauss προκύπτει η ηλεκτρική εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} J_e = 0.$$

Οι νόμοι Ampère, Faraday και οι δυο νόμοι του Gauss αποτελούν ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, γνωστό ως σύστημα Maxwell, το οποίο αποτελεί το γενικό μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός οποιουδήποτε συνεχούς μέσου. Το σύστημα Maxwell περιγράφει με μαθηματικό τρόπο συγκεκριμένα πειραματικά αποτελέσματα με την έννοια αυτή δεν μπορεί να αποδειχθεί. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν αξιώματα της Φυσικής, δεν μπορούν δηλαδή να εξαχθούν από άλλους νόμους ή θεωρίες, αλλά τεκμηριώνονται πειραματικά.

Από το σύστημα των εξισώσεων Maxwell ζητείται να υπολογιστούν οι τέσσερις διανυσματικές συναρτήσεις (B, D, E, H) . Οι συναρτήσεις αυτές, γενικά, παίρνουν τιμές στον \mathbb{R}^3 και μάλιστα θεωρούνται εφαρμοστά διανύσματα στα σημεία του Ω . Πολλές φορές όμως, για καθαρά μαθηματικούς λόγους επιτρέπουμε οι τιμές να παίρνονται στο \mathbb{C}^3 . Ως αντίστοιχες τότε φυσικές ποσότητες λαμβάνονται τα πραγματικά μέρη. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν θα πρέπει να υπολογιστούν δώδεκα βαθμωτές συναρτήσεις. Οι νόμοι Ampère και Faraday είναι διανυσματικές ΜΔΕ, συνιστούν δηλαδή ένα σύστημα έξι βαθμωτών ΜΔΕ. Οι νόμοι του Gauss είναι άλλες δύο βαθμωτές ΜΔΕ. Άρα οι εξισώσεις Maxwell

είναι ένα σύστημα οκτώ ΜΔΕ με δώδεκα αγνώστους, δεν είναι συνεπώς καλά ορισμένο.

Είναι μάλιστα σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι δύο νόμοι του Gauss είναι, κατά μία έννοια, πλεονάζουσες εξισώσεις στο σύστημα αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση συνέχειας είναι αληθής, δηλαδή αν δεχθούμε αυτές ως αξιώματα κατά τη μοντελοποίηση. Αυτό μπορεί να γίνει αφού οι εξισώσεις συνέχειας αναφέρονται σε γνωστές ποσότητες. Προκύπτει τότε άμεσα ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} D - \rho_e) = 0.$$

Από τις τελευταίες αυτές εξισώσεις βλέπουμε ότι αν οι νόμοι του Gauss ισχύουν για κάποια χρονική στιγμή τότε ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, οι νόμοι αυτοί μπορούν να απορροφηθούν στις αρχικές συνθήκες. Ουσιαστικά λοιπόν το σύστημα Maxwell αποτελείται από τους νόμους Ampère και Faraday και τις εξισώσεις συνέχειας (οι οποίες απλά επιβάλλουν περιορισμό στην επιλογή των αρχικών συνθηκών). Έχει επικρατήσει ως άγνωστοι να θεωρούνται τα πεδία E και H και αναφερόμαστε στο διάνυσμα (E, H) ως ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (H/M) . Για να καταστεί το σύστημα καλά ορισμένο χρειάζονται έξι επιπλέον σχέσεις

$$D = D(E, H)$$

$$B = B(E, H).$$

Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται καταστατικές εξισώσεις και αποτελούν ουσιαστικά τη μαθηματική περιγραφή του υλικού μέσου εντός του οποίου λαμβάνει χώρα το φαινόμενο. Κατά κανόνα είναι εμπειρικές σχέσεις που προκύπτουν μέσα από πειραματική διαδικασία με τον ακόλουθο τρόπο. Για το υπό μελέτη υλικό ορίζονται στο Ω δύο χρονικά μεταβαλλόμενα διανυσματικά πεδία, η πόλωση \mathbb{P} και η μαγνήτιση \mathbb{M} με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\mathbb{P} + \epsilon_0 E = D$$

$$\mathbb{M} + \mu_0 H = B.$$

Οι σταθερές ϵ_0, μ_0 είναι η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά και η απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα. Η πόλωση και η μαγνήτιση ενός υλικού είναι παρατηρήσιμα μεγέθη και για μια μεγάλη κατηγορία υλικών σε ηρεμία, εξαρτώνται μόνο από τα E, H . Η γνώση της εξάρτησης αυτής οδηγεί στις εκάστοτε καταστατικές εξισώσεις. Για κάποια συγκεκριμένα προβλήματα, είναι δυνατόν στις καταστατικές εξισώσεις να προστίθεται και κάποιος γενικευμένος νόμος του Ohm. Πρόκειται για μια εξίσωση που εκφράζει την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος συναρτήσει του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $J_e = J_e(E, H)$. Θα προσθέσουμε τέλος τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι αρχικές συνθήκες θα είναι της μορφής

$$E(x, 0) = E_0(x)$$

$$H(x, 0) = H_0(x)$$

όπου οι $E_0, H_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι δεδομένες συναρτήσεις. Θα θεωρήσουμε ακόμη τη συνοριακή συνθήκη του τέλει αγωγού

$$\hat{n} \times E(x, t) = 0 \text{ για } x \in \partial\Omega.$$

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι όλες οι ποσότητες που θα μας απασχολήσουν είναι αδιάστατες, θεωρούμε λοιπόν μια διαδικασία διαστατικής ανάλυσης και κανονικοποίησης ως δεδομένη. Αυτό σε καμία περίπτωση δε σημαίνει ότι μια τέτοια διαδικασία θα πρέπει να θεωρείται απλή ή αμελητέα.

1.2 Φορμαλισμός των προβλημάτων

Θα δώσουμε τώρα ένα γενικό πλαίσιο διατύπωσης προβλημάτων στον Ηλεκτρομαγνητισμό και τελικός μας στόχος είναι να διατυπώσουμε, φορμαλιστικά αρχικά, τις εξισώσεις Maxwell ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών σε κατάλληλο χώρο Hilbert. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι ποσότητες B, D, E, H είναι χρονικά εξαρτημένα διανυσματικά πεδία, ορισμένα σε έναν τόπο Ω του \mathbb{R}^3 . Ας θεωρήσουμε τώρα έναν χώρο Hilbert $F(\Omega; \mathbb{R}^3)$ διανυσματικών συναρτήσεων από το Ω στο \mathbb{R}^3 . Θεωρούμε ότι κάθε τέτοιο πεδίο είναι μια συνάρτηση από το σύνολο \mathbb{R} στο χώρο Hilbert $F(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Έστω ο χώρος

$$\mathcal{H} := F(\Omega, \mathbb{R}^3) \times F(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

και θέτουμε (six-vector notation) $d := \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}$, $e := \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$, $j := \begin{pmatrix} -J_e \\ 0 \end{pmatrix}$.

Τα πεδία αυτά λαμβάνονται ως συναρτήσεις $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ και ονομάζονται Η/Μ διέγερση, Η/Μ πεδίο και πυκνότητα Η/Μ ρεύματος αντιστοίχως. Ορίζουμε τώρα φορμαλιστικά, ως πίνακα διαφορικών τελεστών, τον τελεστή του Maxwell

$$M := \begin{pmatrix} 0 & \text{curl} \\ -\text{curl} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο M μπορεί να θεωρηθεί ως ένας block 6×6 πίνακας διαφορικών τελεστών, αν παρατηρήσουμε ότι

$$\text{curl} := \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_3} & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} & 0 & -\partial_{x_1} \\ -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Με ∂ συμβολίζουμε την μερική παραγωγήιση ως προς την αντίστοιχη χωρική μεταβλητή. Παίρνουμε στη συνέχεια έναν κατάλληλο συναρτησιακό χώρο

$\mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ και θεωρούμε τα πεδία e, d ως στοιχεία αυτού. Κατόπιν τούτου, η καταστατική εξίσωση μπορεί να τεθεί υπό τη συναρτησιακή μορφή

$$d = Ve$$

όπου ο V είναι ένας τελεστής με τιμές στον $\mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$. Οι νόμοι του Faraday και Ampère γράφονται τώρα συνοπτικά

$$(Ve)' = Me + j. \quad (1.1)$$

Η εξίσωση (1.1) στην οποία και θα αναφερόμαστε ως σύστημα Maxwell είναι μια διαφορική συναρτησιακή εξίσωση (ουδέτερου τύπου) με χώρο φάσης τον \mathcal{H} . Η (1.1) θα ερμηνεύεται πάντα με την ασθενή έννοια, θα υποθέσουμε δηλαδή ότι $\mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ ενώ η ισότητα εννοείται με τη σχεδόν παντού έννοια της. Ο στόχος εδώ είναι να αντιστρέψουμε τον τελεστή V και να μελετήσουμε την εξίσωση ως διαταραχή του μη ομογενούς προβλήματος

$$e' = \widetilde{M}e + \widetilde{j}$$

το οποίο με τη σειρά του, θεωρείται διαταραχή του γενικού προβλήματος

$$e' = \widetilde{M}e.$$

Είναι προφανές ότι τη μεγάλη δυσκολία στην (1.1) την προκαλεί η ύπαρξη του τελεστή V ο οποίος δρα πάνω στην άγνωστη συνάρτηση ολικά. Για το λόγο αυτό, μια συστηματική μελέτη του τελεστή V είναι σημαντική τόσο από φυσικής απόψεως όσο και από μαθηματικής, στην πρώτη περίπτωση διότι αποτελεί την περιγραφή του υλικού που καταλαμβάνει το χώρο Ω και στη δεύτερη διότι καθορίζει την επιλυσιμότητα της εξίσωσης (1.1). Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του V είναι εκείνα που χαρακτηρίζουν τις φυσικές ιδιότητες των εμπλεκόμενων υλικών ενώ οι αναλυτικές του ιδιότητες καθιστούν την (1.1) καλά τοποθετημένη ή όχι.

1.3 Αξιώματα επί του υλικού

Θα παρουσιάσουμε [44] τώρα τη σχέση του τελεστή V με τη μοντελοποίηση διαφόρων χαρακτηριστικών του υλικού που καταλαμβάνει την περιοχή Ω . Θα ασχοληθούμε δηλαδή με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του V . Ας ξεκινήσουμε με το πεδίο ορισμού του τελεστή V . Ο τελεστής αυτός θα παίρνει τιμές από τον συναρτησιακό χώρο $\mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ και έχει ως αποτέλεσμα τη διέγερση $d = d(x, t)$. Η διέγερση στο δεδομένο χρόνο $t \in \mathbb{R}$ και στη δεδομένη θέση $x \in \Omega$, μπορεί να καθορίζεται τόσο από τα x, t , όσο και από τις τιμές του πεδίου

$$e = e(x', t') \text{ για } (x', t') \in I(t) \times U(x)$$

για κατάλληλα υποσύνολα $I(t) \subseteq \mathbb{R}, U(x) \subseteq \Omega$.

Υπόθεση 1. Η ύπαρξη H/M πεδίου προκαλεί H/M διέγερση, ισοδύναμα τα σύνολα $I(t), U(x)$ δεν είναι κενά, για όλες τις επιλογές $t \in \mathbb{R}, x \in \Omega$.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε σε μια πρώτη ταξινόμηση των υλικών, ανάλογα με την εξάρτηση του V από το χρόνο, τη θέση και τις τιμές του πεδίου.

- Αν $V = V(t)$ τότε το μέσο ονομάζεται μη στάσιμο ή μη αυτόνομο
- Αν $V = V(x)$ τότε το μέσο ονομάζεται μη ομογενές. Ειδικότερα, αν $V = V(|x|)$ τότε ονομάζεται ακτινικό
- Αν ο V είναι περιοδική συνάρτηση του x , τότε το μέσο θα λέγεται περιοδικό
- Αν $I(t) = t$ τότε λέμε ότι το υλικό είναι τοπικό στο χρόνο
- Αν το $I(t)$ περιέχει κάποιο διάστημα της μορφής $[a(t), b(t)]$ όπου $a(t) < b(t) \leq t$, τότε λέμε ότι το υλικό παρουσιάζει μνήμη
- Αν $U(x) = \{x\}$ τότε λέμε ότι το υλικό είναι τοπικό στο χώρο. Στην περίπτωση όπου το σύνολο $U(x)$ είναι ένα ευρύτερο σύνολο, λέμε ότι παρουσιάζει χωρική διασπορά.

Υπόθεση 2. (Χωρική συμπεριφορά). Το υλικό είναι μη ομογενές και τοπικό στο χώρο. Η υπόθεση αυτή προφανώς δεν αποκλείει τα ομογενή υλικά. Με βάση τον ορισμό μας η μη ομογένεια είναι καταχρηστικά μια ειδική περίπτωση ομογένειας.

Υπόθεση 3. (Απόκριση στο χρόνο) Το υλικό είναι αυτόνομο και μη τοπικό στο χρόνο. Μπορούμε τώρα να υλοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση ως τον τελεστή $V : \Omega \times \mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

Υπόθεση 4. (Γραμμικότητα) Το H/M πεδίο θεωρείται μικρό σε μέγεθος σε σχέση με την κλίμακα του προβλήματος. Συνεπώς το υλικό αντιδρά γραμμικά, ισοδύναμα ο τελεστής $V(x)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{X}(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον $V(x)$ ως έναν 2×2 πίνακα

$$V := \begin{pmatrix} \epsilon(x) & \xi(x) \\ \zeta(x) & \mu(x) \end{pmatrix}$$

όπου κάθε στοιχείο του είναι ένας γραμμικός τελεστής στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{X}(\mathbb{R}; F(\Omega; \mathbb{R}^3))$. Με βάση την ανάλυση αυτή, μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια δεύτερη ταξινόμηση των υλικών.

Υπόθεση 5. Το ηλεκτρικό (αντ. μαγνητικό) πεδίο προκαλεί ηλεκτρική (αντ. μαγνητική) διέγερση, ισοδύναμα $\epsilon(x), \mu(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Omega$.

- Αν τουλάχιστον ένας εκ των δύο τελεστών $\xi(x), \zeta(x)$ δεν είναι ο μηδενικός (αν δηλαδή ο V δεν είναι διαγώνιος πίνακας) τότε το υλικό λέγεται οπτικά ενεργό.
- Αν ο $V(x)$ είναι διαγώνιος τότε το υλικό λέγεται ανισοτροπικό. Ειδικότερα, αν κάθε ένας από τους $\epsilon(x), \mu(x)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή τότε λέγεται ισοτροπικό.
- Αν ο $V(x)$ δεν είναι διαγώνιος τότε το υλικό λέγεται διανισοτροπικό. Ειδικότερα, αν κάθε ένας από τους $\epsilon(x), \mu(x), \xi(x), \zeta(x)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή τότε λέγεται δισοτροπικό.

Υπόθεση 6. (Αιτιότητα) Το υλικό «θυμάται» όλο το παρελθόν αλλά δεν μπορεί να δει στο μέλλον, ισοδύναμα $I(t) = (-\infty, t]$.

Υπόθεση 7. (Ελευθερία στην επιλογή του παρόντος) Οποιαδήποτε χρονική στιγμή και αν αρχίσουμε την παρατήρηση του υλικού, αυτό αντιδρά με τον ίδιο τρόπο.

Από μαθηματικής απόψεως όμως η παραπάνω υπόθεση είναι εξαιρετικά χρήσιμη αφού αφενός μας εξασφαλίζει τη συνέχεια του τελεστή $V(x)$ και αφετέρου μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

1.4 Ο καταστατικός νόμος και το πρόβλημα

Με τις υποθέσεις ότι ο καταστατικός τελεστής είναι αιτιατός, αμετάβλητος στις μεταθέσεις και τοπικός, [25], [44], από την ανάλυση που προηγήθηκε, βρίσκουμε ότι αν τα πεδία d, e υποτεθούν (τοπικά) ολοκληρώσιμα, τότε ικανοποιούν μια σχέση

$$\int_0^t d(x; \tau) d\tau = \int_0^t K(t - \tau; x) e(\tau; x) d\tau \text{ για } t \geq 0, x \in \Omega.$$

Με την επιπλέον τεχνική υπόθεση του παραγωγίσμου πυρήνα, καταλήγουμε στην τελική μορφή του καταστατικού νόμου που θα χρησιμοποιήσουμε

$$d(x; t) = A(x)e(x; t) + \int_0^t K(t - \tau; x)e(x; \tau) d\tau$$

όπου A, K είναι 6×6 πίνακες. Αντικαθιστώντας, τη σχέση αυτή στις εξισώσεις Maxwell και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε ένα εξελικτικό πρόβλημα για μια ολοκληρωτικό-διαφορική εξίσωση ουδέτερου τύπου.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των στοιχείων του πίνακα οπτικής απόκρισης A μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό[44]:

Ορισμός 1.1. Ένα υλικό λέγεται

- ισοτροπικό αν $\epsilon, \mu, \epsilon_d, \mu_d$ είναι βαθμωτά πολλαπλάσια ενός $I_{3 \times 3}$ πίνακα και $\xi = \zeta = \xi_d = \zeta_d = 0$
- ανισοτροπικό αν τα στοιχεία τουλάχιστον ενός από τα ζευγάρια ϵ, ϵ_d , ή μ, μ_d δεν είναι βαθμωτά πολλαπλάσια ενός $I_{3 \times 3}$ πίνακα και $\xi = \zeta = \xi_d = \zeta_d = 0$
- διυσοτροπικό αν όλοι οι υποπίνακες των A, G είναι βαθμωτά πολλαπλάσια του μοναδιαίου πίνακα $I_{3 \times 3}$
- διανισοτροπικό σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις

Υπόθεση 1. Ο πίνακας οπτικής απόκρισης έχει φραγμένα στοιχεία και είναι σχεδόν παντού συμμετρικός. Επίσης, για σχεδόν όλα τα x που ανήκουν στο χωρίο είναι ομοιόμορφα πιεστικός.

Κεφάλαιο 2

Ομοιογενοποίηση των εξισώσεων Maxwell

2.1 Εισαγωγή

Σύνθετα υλικά είναι εκείνα που αποτελούνται από δύο ή περισσότερα αναμειγμένα συστατικά. Τα υλικά αυτά είναι αρκετά διαδεδομένα στην βιομηχανία αφού έχουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στην πράξη η συμπεριφορά τους είναι πολύ καλύτερη από την μέση συμπεριφορά των συστατικών που τα αποτελούν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα κεραμικά.

Σε ένα καλό σύνθετο υλικό, οι ανομοιογένειες είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με την όλη διάσταση του δείγματος. Όσο πιο μικρές είναι οι ανομοιογένειες τόσο καλύτερο είναι το μείγμα, το οποίο με μια γρήγορη ματιά μοιάζει ομοιογενές. Αυτός είναι και ο λόγος που κανείς μπορεί να υποθέσει ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Από μαθηματικής απόψεως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή η διασπορά των ανομοιογενειών παρουσιάζει μια περιοδικότητα η οποία εκφράζεται από την παράμετρο ε . Θέλουμε λοιπόν αυτές οι ανομοιογένειες να είναι πολύ μικρές, επομένως θα στέλνουμε το $\varepsilon \rightarrow 0$.

Σε ένα μαθηματικό μοντέλο τα κύρια χαρακτηριστικά ενός υλικού αντιπροσωπεύονται από τους συντελεστές μιας διαφορικής εξίσωσης. Σε ένα σύνθετο υλικό με ε -περιοδική δομή αυτοί οι συντελεστές εξαρτώνται από την παράμετρο ε , έτσι μεταπηδούν στις διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών των συστατικών. Αυτό καθιστά δύσκολη τη μελέτη και κυρίως το υπολογιστικό κομμάτι.

Καθώς λοιπόν παίρνουμε το $\varepsilon \rightarrow 0$ προκύπτει το ομοιογενοποιημένο πρόβλημα με σταθερούς συντελεστές. Το πρόβλημα αυτό αφενός δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση των χαρακτηριστικών του αρχικού σύνθετου υλικού και αφετέρου καθιστά πιο εύκολους τους αριθμητικούς υπολογισμούς.



Για όλους τους προαναφερθέντες λόγους αναπτύχθηκε η ιδέα της ομοιογενοποίησης που συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι είναι

- μελέτη σύνθετων υλικών
- άμεση σύνδεση με Π.Σ.Τ. σε μέσα με περιοδική δομή

Στόχος της ομοιογενοποίησης είναι η μελέτη της μακροσκοπικής συμπεριφοράς ενός συστήματος δηλαδή αντικαθιστούμε ένα μη-ομοιογενές υλικό με ένα ομοιογενές, του οποίου τα χαρακτηριστικά συνιστούν μια καλή προσέγγιση των αρχικών ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού.

Από μαθηματικής απόψεως, οι λύσεις ενός προβλήματος συνοριακών τιμών με μη σταθερούς συντελεστές, που εξαρτώνται από μια μικρή παράμετρο, συγκλίνουν ως προς μια κατάλληλη τοπολογία στη λύση ενός οριακού προβλήματος συνοριακών τιμών με σταθερούς συντελεστές. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι ομοιογενοποίησης. Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε δύο από αυτές τις μεθόδους ακολουθώντας τη χρονική σειρά εμφάνισης.

2.2 Ομοιογενοποίηση με τη μέθοδο της ασυμπτωτικής ανάπτυξης

Κεντρικό ρόλο στα επόμενα θα έχει η έννοια της περιοδικής συνάρτησης στον \mathbb{R}^3 αλλά και της μέσης τιμής μιας συνάρτησης. Συμβολίζουμε με Y το διάστημα του \mathbb{R}^3 που ορίζεται ως

$$Y = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times (0, \ell_3),$$

όπου ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Θα καλούμε το Y περίοδο αναφοράς και θα υποθέτουμε ότι $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1$.

Ορισμός 2.1. Έστω Y η περίοδος αναφοράς και f μια συνάρτηση που ορίζεται σχεδόν παντού στον \mathbb{R}^3 . Η συνάρτηση f καλείται Y -περιοδική αν και μόνον αν

$$f(x + kl_i e_i) = f(x) \text{ σχ.π. στον } \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{Z} \text{ και } i = 1, 2, 3.$$

όπου (e_1, e_2, e_3) είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

Ορισμός 2.2. Έστω Ω ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^3 και f μια συνάρτηση του $L^1(\Omega)$. Η μέση τιμή της f πάνω στο Ω είναι ο πραγματικός αριθμός $\langle f \rangle$ που δίνεται από τον τύπο

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(y) dy.$$

2.2.1 Ομοιογενοποίηση εξισώσεων ελλειπτικού τύπου

Στις εφαρμογές συναντάμε πολλές φορές το πρόβλημα της ομοιογενοποίησης ανομοιογενών υλικών όπου το άγνωστο πεδίο u^ε περιγράφεται από μια εξίσωση ελλειπτικού τύπου της μορφής

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f, \quad (2.1)$$

όπου a^ε είναι ο πίνακας 3×3 με στοιχεία τις Y -περιοδικές συναρτήσεις $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq a \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2 \text{ όπου } a > 0. \quad (2.2)$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι η f είναι γνωστή συνάρτηση κατάλληλης ομαλότητας και $\lambda > 0$.

Πρόβλημα: Να βρεθεί με τη μέθοδο των αναπτυγμάτων η ομοιογενοποιημένη μορφή της (2.1) όταν ο πίνακας $a(x) = (a_{i,j})$ ικανοποιεί την (2.2), $a^\varepsilon = a(\frac{x}{\varepsilon})$ και $u^\varepsilon = 0$ στο $\partial\Omega$.

Επίλυση Προβλήματος Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} a^\varepsilon \operatorname{grad} u_\varepsilon - v_\varepsilon = 0, \\ -\operatorname{div} v_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f. \end{cases} \quad (2.3)$$

Θα αξιοποιήσουμε τώρα ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο [5] στην μέθοδο της ομοιογενοποίησης, το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.

Θέτουμε

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots,$$

$$v_\varepsilon = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots,$$

όπου $u_j(x, y), v_j(x, y)$ Y - περιοδικές συναρτήσεις ως προς y .

Αντικαθιστώντας στο σύστημα (2.3) τις παραπάνω σχέσεις και εξισώνοντας τους συντελεστές της τάξης $\frac{1}{\varepsilon}$ και τους σταθερούς όρους παίρνουμε

$$a \operatorname{grad}_y u_0 = 0 \quad (2.4)$$

$$-\operatorname{div}_y v_0 = 0 \quad (2.5)$$

$$a \operatorname{grad}_y u_1 + a \operatorname{grad}_x u_0 - v_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$-\operatorname{div}_y v_1 - \operatorname{div}_x v_0 + \lambda u_0 = f. \quad (2.7)$$

Από την (2.4), επειδή ο a είναι αντιστρέψιμος, λόγω της (2.2), 3×3 πίνακας προκύπτει $\operatorname{grad}_y u_0 = 0$ και επομένως

$$u_0 = u(x). \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.6) βρίσκουμε

$$\operatorname{grad}_y u_1 = -\operatorname{grad}_x u + a^{-1}v_0. \quad (2.9)$$

Επειδή $\operatorname{curl} \operatorname{grad} = 0$ αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση η εξίσωση (2.9) είναι η

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}_y(-\operatorname{grad}_x u + a^{-1}v_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{curl}_y(a^{-1}v_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2.10)

$$a^{-1}v_0 = w_0 \quad (2.11)$$

οπότε

$$\operatorname{curl}_y w_0 = 0 \quad (2.12)$$

και επομένως

$$\operatorname{curl}_y(w_0 - \langle w_0 \rangle) = 0 \quad (2.13)$$

με

$$\langle w_0 - \langle w_0 \rangle \rangle = 0. \quad (2.14)$$

Από τις (2.13), (2.14) προκύπτει ότι υπάρχει Y περιοδική συνάρτηση P τέτοια ώστε:

$$w_0 - \langle w_0 \rangle = -\operatorname{grad}_y P. \quad (2.15)$$

Από τις (2.11), (2.15) προκύπτει $v_0 = aw_0 = a\langle w_0 \rangle - a \operatorname{grad}_y P$ με αντικατάσταση της οποίας στην (2.5) παίρνουμε

$$\operatorname{div}_y(a \operatorname{grad}_y P) = \operatorname{div}_y(a\langle w_0 \rangle). \quad (2.16)$$

Θεωρούμε τις βαθμωτές συναρτήσεις $x^j(y)$ με $j = 1, 2, 3$ και $y \in Y$ που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\operatorname{div}_y(a \operatorname{grad}_y x^j) = \operatorname{div}_y(a e_j) \quad \text{όπου } j = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

τότε αποδεικνύεται ότι

$$P = x(y) \cdot \langle w_0 \rangle \quad (2.18)$$

όπου $x(y) = (x^1(y), x^2(y), x^3(y))$. Επίσης, η (2.9) έχει λύση τότε και μόνο τότε, όταν $\int_Y (a^{-1} v_0 - \operatorname{grad} u) dy = 0$ η οποία είναι τελικά ισοδύναμη με την

$$\operatorname{grad} u = \langle w_0 \rangle. \quad (2.19)$$

Από τις σχέσεις (2.18) και (2.19) προκύπτει

$$P(x, y) = x(y) \cdot \operatorname{grad}_x u(x). \quad (2.20)$$

Εξάλλου, η (2.7) έχει λύση ως προς v_1 όταν και μόνο όταν $\int_Y (\operatorname{div}_x v_0 - \lambda v_0 + f) dy = 0$ που είναι τελικά ισοδύναμη με την

$$-\operatorname{div}_x \langle v_0 \rangle + \lambda u = f. \quad (2.21)$$

Από τις (2.9), (2.15) και (2.16) προκύπτει

$$\langle v_0 \rangle = \langle a(I - \operatorname{grad} x(y)) \rangle \operatorname{grad} u. \quad (2.22)$$

Από τις (2.21) και (2.22) παίρνουμε

$$-\operatorname{div}_x \langle a(y)(I - \operatorname{grad} x(y)) \rangle \operatorname{grad} u + \lambda u = f.$$

Συμπέρασμα: Η ομοιογενοποίηση της οικογένειας των τελεστών

$$A^\varepsilon = -\operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon, \text{ με } \varepsilon, \lambda > 0$$

για $\varepsilon \rightarrow 0$ είναι ο τελεστής

$$A = -\operatorname{div}_x \langle a(y)(I - \operatorname{grad} x(y)) \rangle \operatorname{grad} u + \lambda u$$

όπου $x(y) = (x^1(y), x^2(y), x^3(y))$ με $x^j(y)$ να είναι περιοδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν το πρόβλημα «κελιού»

$$\operatorname{div}_y(a \operatorname{grad} x^j(y)) = \operatorname{div}_y(a e_j) \text{ με } j = 1, 2, 3$$

$$\int_Y x(y) dy = 0.$$

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των αναπτυγμάτων για την ομοιογενοποίηση του συστήματος Maxwell σε περιβάλλον διανιστροπικού υλικού.

2.2.2 Ομοιογενοποίηση εξισώσεων Maxwell σε διανισοτροπικά υλικά

Έστω Ω ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 και σε αυτό θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών-αρχικών τιμών Maxwell:

$$\partial_t D^\varepsilon = \text{curl } H^\varepsilon + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (2.23)$$

$$\partial_t B^\varepsilon = -\text{curl } E^\varepsilon + G(x, t), \quad (2.24)$$

$$E^\varepsilon(x, 0) = H^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.25)$$

$$\hat{n} \times E^\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (2.26)$$

όπου $F(x, t) = -J_e$ και $G(x, t) = -J_m$ οι διανυσματικές συναρτήσεις $E^\varepsilon = E^\varepsilon(x, t), H^\varepsilon = H^\varepsilon(x, t), D^\varepsilon = D^\varepsilon(x, t)$ και $B^\varepsilon = B^\varepsilon(x, t)$ συνδέονται στο Ω με τις παρακάτω καταστατικές εξισώσεις [44]:

$$D^\varepsilon(x, t) = \epsilon^\varepsilon(x)E^\varepsilon(x, t) + \xi^\varepsilon(x)H^\varepsilon(x, t) + \epsilon_d^\varepsilon(x) * E^\varepsilon(x, t) + \xi_d^\varepsilon(x) * H^\varepsilon(x, t) \quad (2.27)$$

$$B^\varepsilon(x, t) = \zeta^\varepsilon(x)E^\varepsilon(x, t) + \mu^\varepsilon(x)H^\varepsilon(x, t) + \zeta_d^\varepsilon(x) * E^\varepsilon(x, t) + \mu_d^\varepsilon(x) * H^\varepsilon(x, t). \quad (2.28)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις είναι $\epsilon^\varepsilon = \epsilon(\frac{x}{\varepsilon}), \dots, \mu^\varepsilon(x) = \mu(\frac{x}{\varepsilon})$ με $\epsilon(x), \dots, \mu(x)$ πίνακες 3×3 που εξαρτώνται από τη θέση x και $\varepsilon > 0$. Επίσης, $\epsilon_d^\varepsilon = \epsilon_d(\frac{x}{\varepsilon}, t), \dots, \mu_d^\varepsilon(x) = \mu_d(\frac{x}{\varepsilon}, t)$ και το $*$ συμβολίζει την συνέλιξη. Αν συμβολίσουμε με \hat{X} τον μετασχηματισμό Laplace της διανυσματικής συνάρτησης $X(x, t)$ και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συνέλιξης $L(u * v) = \hat{u}\hat{v}$ από τις (2.27), (2.28) προκύπτουν αντίστοιχα

$$\hat{D}^\varepsilon = \epsilon_L^\varepsilon \hat{E}^\varepsilon + \xi_L^\varepsilon \hat{H}^\varepsilon \quad \text{όπου} \quad \epsilon_L^\varepsilon := \epsilon^\varepsilon + \hat{\eta}_d^\varepsilon; \quad \xi_L^\varepsilon := \xi^\varepsilon + \hat{\xi}_d^\varepsilon \quad (2.29)$$

$$\hat{B}^\varepsilon = \zeta_L^\varepsilon \hat{E}^\varepsilon + \mu_L^\varepsilon \hat{H}^\varepsilon \quad \text{όπου} \quad \zeta_L^\varepsilon := \zeta^\varepsilon + \hat{\zeta}_d^\varepsilon; \quad \mu_L^\varepsilon := \mu^\varepsilon + \hat{\mu}_d^\varepsilon. \quad (2.30)$$

Επίσης, από τις (2.27), (2.28) με τη βοήθεια της (2.25) βρίσκουμε

$$D^\varepsilon(x, 0) = B^\varepsilon(x, 0) = 0. \quad (2.31)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των (2.23), (2.24) έχουμε

$$L\{\partial_t D^\varepsilon\} = L\{\text{curl } H^\varepsilon\} + L\{F(x, t)\}$$

$$L\{\partial_t B^\varepsilon\} = -L\{\text{curl } E^\varepsilon\} + L\{G(x, t)\}$$

ή διαφορετικά

$$p\hat{D}^\varepsilon - D^\varepsilon(x, 0) = \text{curl } \hat{H}^\varepsilon + \hat{F}$$

$$p\hat{B}^\varepsilon - B^\varepsilon(x, 0) = -\text{curl } \hat{E}^\varepsilon + \hat{G}$$

οι οποίες με τη βοήθεια της (2.31) γίνονται:

$$p\widehat{D}^\varepsilon = \operatorname{curl} \widehat{H}^\varepsilon + \widehat{F}$$

$$p\widehat{B}^\varepsilon = -\operatorname{curl} \widehat{E}^\varepsilon + \widehat{G}.$$

Αν στις τελευταίες αντικαταστήσουμε τα \widehat{D}^ε και \widehat{B}^ε από τις (2.29), (2.30) προκύπτουν οι:

$$p\left(\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^\varepsilon + \xi_L^\varepsilon \widehat{H}^\varepsilon\right) = \operatorname{curl} \widehat{H}^\varepsilon + \widehat{F} \quad (2.32)$$

$$p\left(\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^\varepsilon + \mu_L^\varepsilon \widehat{H}^\varepsilon\right) = -\operatorname{curl} \widehat{E}^\varepsilon + \widehat{G}. \quad (2.33)$$

Υποθέτουμε ότι

$$\widehat{E}^\varepsilon = \widehat{E}^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \widehat{E}^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.34)$$

$$\widehat{H}^\varepsilon = \widehat{H}^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \widehat{H}^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2). \quad (2.35)$$

Εισάγουμε τις (2.34), (2.35) στις (2.32), (2.33) και λαμβάνουμε υπόψη ότι:

$$\operatorname{curl} \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \operatorname{curl}_x \phi + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{curl}_\psi \phi \text{ με } \psi = \frac{x}{\varepsilon}$$

οπότε έχουμε

$$p\left[\epsilon_L^\varepsilon \left(\widehat{E}^0 + \varepsilon \widehat{E}^1\right) + \xi_L^\varepsilon \left(\widehat{H}^0 + \varepsilon \widehat{H}^1\right)\right] = \left(\operatorname{curl}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{curl}_y\right) \left(\widehat{H}^0 + \varepsilon \widehat{H}^1\right) + \widehat{F}$$

$$p\left[\zeta_L^\varepsilon \left(\widehat{E}^0 + \varepsilon \widehat{E}^1\right) + \mu_L^\varepsilon \left(\widehat{H}^0 + \varepsilon \widehat{H}^1\right)\right] = \left(-\operatorname{curl}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{curl}_y\right) \left(\widehat{E}^0 + \varepsilon \widehat{E}^1\right) + \widehat{G}.$$

Από τις τελευταίες ισότητες κάνοντας πράξεις και εξισώνοντας τις όμοιες δυνάμεις του ε βρίσκουμε:

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : \operatorname{curl}_y \widehat{H}^{(0)} = 0 \quad (2.36)$$

$$O(1) : p\left(\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \xi_L^\varepsilon \widehat{H}^0\right) = \operatorname{curl}_x \widehat{H}^0 + \operatorname{curl}_y \widehat{H}^1 + \widehat{F} \quad (2.37)$$

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : \operatorname{curl}_y \widehat{E}^{(0)} = 0 \quad (2.38)$$

$$O(1) : p\left(\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \mu_L^\varepsilon \widehat{H}^0\right) = -\operatorname{curl}_x \widehat{E}^0 - \operatorname{curl}_y \widehat{E}^1 + \widehat{G}. \quad (2.39)$$

Γράφουμε τις (2.37), (2.39) ως εξής:

$$\operatorname{curl}_y \widehat{H}^1 = p\left(\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \xi_L^\varepsilon \widehat{H}^0\right) - \operatorname{curl}_x \widehat{H}^0 - \widehat{F} \quad (2.40)$$

$$-\operatorname{curl}_y \widehat{E}^1 = p \left(\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \mu_L^\varepsilon \widehat{H}^0 \right) + \operatorname{curl}_x \widehat{E}^0 - \widehat{G}. \quad (2.41)$$

Επειδή $\operatorname{div}_y \operatorname{curl}_y = 0$, $\operatorname{div}_y \operatorname{curl}_x \widehat{H}^0 = -\operatorname{div}_x \operatorname{curl}_y \widehat{H}^0 = 0$, $\operatorname{div}_y \operatorname{curl}_x \widehat{E}^0 = -\operatorname{div}_x \operatorname{curl}_y \widehat{E}^0 = 0$ και $\operatorname{div}_y \widehat{F} = \operatorname{div}_y \widehat{G} = 0$ αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι (2.40),(2.41) λύση είναι

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \left(\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \xi_L^\varepsilon \widehat{H}^0 \right) = 0 \\ \operatorname{div}_y \left(\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^0 + \mu_L^\varepsilon \widehat{H}^0 \right) = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Από τις (2.36) και (2.38) παίρνουμε

$$\widehat{E}^0 = \widehat{E}^\# + \nabla_y \Psi_1(x, y) \quad (2.43)$$

$$\widehat{H}^0 = \widehat{H}^\# + \nabla_y \Psi_2(x, y) \quad (2.44)$$

όπου $\widehat{E}^\# = \int_y \widehat{E}^0(x, y) du_y$ και $\widehat{H}^\# = \int_y \widehat{H}^0(x, y) du_y$ με Ψ_1, Ψ_2 βαθμωτές συναρτήσεις. Εισάγοντας τις (2.43) και (2.44) στις (2.42) βρίσκουμε

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \nabla_y \Psi_1 + \xi_L^\varepsilon \nabla_y \Psi_2) = -\operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^\# + \xi_L^\varepsilon \widehat{H}^\#) \\ \operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \nabla_y \Psi_1 + \mu_L^\varepsilon \nabla_y \Psi_2) = -\operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^\# + \mu_L^\varepsilon \widehat{H}^\#). \end{cases} \quad (2.45)$$

Κατά αναλογία, (2.20) προς τη διαδικασία ομοιογενοποίησης της εξίσωσης

$$-\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \operatorname{grad} u^\varepsilon \right) \right) + \lambda u^\varepsilon = f$$

αναζητούμε λύση (Ψ_1, Ψ_2) του συστήματος (2.45) της μορφής:

$$\Psi_1(x, y) = \Lambda^1(y) \widehat{E}^\#(x) + \Lambda^2(y) \widehat{H}^\#(x) \quad (2.46)$$

$$\Psi_2(x, y) = \Lambda^3(y) \widehat{E}^\#(x) + \Lambda^4(y) \widehat{H}^\#(x). \quad (2.47)$$

Αντικαθιστούμε τις (2.46),(2.47) στις (2.45) και προκύπτει

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^1) \widehat{E}^\# + \operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^2) \widehat{H}^\# + \operatorname{div}_y (\xi_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^3) \widehat{E}^\# + \operatorname{div}_y (\xi_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^4) \widehat{H}^\# \\ = -\operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \widehat{E}^\#) - \operatorname{div}_y (\xi_L^\varepsilon \widehat{H}^\#) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^1) \widehat{E}^\# + \operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^2) \widehat{H}^\# + \operatorname{div}_y (\mu_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^3) \widehat{E}^\# + \operatorname{div}_y (\mu_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda^4) \widehat{H}^\# \\ = -\operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \widehat{E}^\#) - \operatorname{div}_y (\mu_L^\varepsilon \widehat{H}^\#). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των $\widehat{E}^\#$ και $\widehat{H}^\#$ βρίσκουμε:

$$\operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^1) + \operatorname{div}_y (\xi_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^3) = -\operatorname{div}_y (\epsilon_L^{\varepsilon, j}) \quad (2.48)$$

$$\operatorname{div}_y (\epsilon_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^2) + \operatorname{div}_y (\xi_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^4) = -\operatorname{div}_y (\xi_L^{\varepsilon, j}) \quad (2.49)$$

$$\operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^1) + \operatorname{div}_y (\mu_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^3) = -\operatorname{div}_y (\zeta_L^{\varepsilon, j}) \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div}_y (\zeta_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^2) + \operatorname{div}_y (\mu_L^\varepsilon \nabla_y \Lambda_j^4) = -\operatorname{div}_y (\mu_L^{\varepsilon, j}) \quad (2.51)$$

όπου $\epsilon_L^{\varepsilon, j}$ είναι η j -στήλη του ϵ_L^ε , όμοια και για τα υπόλοιπα. Από τις σχέσεις (2.48)-(2.51) προσδιορίζονται τα διανύσματα $\Lambda^1 - \Lambda^4$. Επειδή λόγω περιοδικότητας $\int_Y \operatorname{curl}_y \widehat{H}^1(x, y) du_y = 0$ η (2.40) έχει λύση (Fredholm) όταν:

$$\begin{aligned}
 0 &= p \left[\int_Y \epsilon_L(y) \widehat{E}^0(x, y) du_y + \int_Y \xi_L(y) \widehat{H}^0(x, y) du_y \right] \\
 &\quad - \int_Y \operatorname{curl}_x \widehat{H}^0(x, y) du_y - \int_Y \widehat{F}(x, t) du_y \\
 0 &= p \left[\int_Y \epsilon_L(y) (\widehat{E}^\# + \nabla_y \Psi_1) du_y + \int_Y \xi_L(y) (\widehat{H}^\# + \nabla_y \Psi_2) du_y \right] \\
 &\quad - \operatorname{curl}_x \int_Y \widehat{H}^0(x, y) du_y - \widehat{F} \\
 0 &= p \left[\int_Y \epsilon_L(y) du_y \widehat{E}^\# + \int_Y \epsilon_L(y) (\nabla_y \Lambda^1 \widehat{E}^\# + \nabla_y \Lambda^2 \widehat{H}^\#) du_y \right. \\
 &\quad \left. + \int_Y \xi_L(y) du_y \widehat{H}^\# + \int_Y \xi_L(y) (\nabla_y \Lambda^3 \widehat{E}^\# + \nabla_y \Lambda^4 \widehat{H}^\#) du_y \right] - \operatorname{curl}_x \widehat{H}^\# - \widehat{F} \\
 0 &= p \left[\int_Y (\epsilon_L + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^1 + \xi_L \nabla_y \Lambda^3) du_y \widehat{E}^\# + \int_Y (\xi_L + \xi_L \nabla_y \Lambda^4 + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^2) du_y \widehat{H}^\# \right] \\
 &\quad - \operatorname{curl}_x \widehat{H}^\# - \widehat{F} \\
 0 &= p \left[\langle \epsilon_L + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^1 + \xi_L \nabla_y \Lambda^3 \rangle \widehat{E}^\# + \langle \xi_L + \xi_L \nabla_y \Lambda^4 + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^2 \rangle \widehat{H}^\# \right] \\
 &\quad - \operatorname{curl}_x \widehat{H}^\# - \widehat{F} \\
 0 &= p(\epsilon_L^h \widehat{E}^\# + \xi_L^h \widehat{H}^\#) - \operatorname{curl}_x \widehat{H} - \widehat{F} \operatorname{curl}_x \widehat{H}^\# = p(\epsilon_L^h \widehat{E}^\# + \xi_L^h \widehat{H}^\#) - \widehat{F}
 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \epsilon_L^h &= \langle \epsilon_L + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^1 + \xi_L \nabla_y \Lambda^3 \rangle \\
 \xi_L^h &= \langle \xi_L + \xi_L \nabla_y \Lambda^4 + \epsilon_L \nabla_y \Lambda^2 \rangle
 \end{aligned}$$

με προφανή τον συμβολισμό $\langle \rangle = \int_Y du_y$. Με την ίδια διαδικασία από την (2.41) προκύπτει

$$-\operatorname{curl}_x \widehat{E}^\# = p(\zeta_L^h \widehat{E}^\diamond + \mu_L^h \widehat{H}^\#) - \widehat{G}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \zeta_L^h &= \langle \zeta_L + \zeta_L \nabla_y \Lambda^1 + \mu_L \nabla_y \Lambda^3 \rangle \\
 \mu_L^h &= \langle \mu_L + \zeta_L \nabla_y \Lambda^2 + \mu_L \nabla_y \Lambda^4 \rangle.
 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές - πίνακες 3×3 $\epsilon_L^h, \xi_L^h, \zeta_L^h$ και μ_L^h που ορίστηκαν παραπάνω σύμφωνα με την πρόταση 9.4.16 του [44] είναι ισοδύναμα οι ομοιογενοποιημένοι συντελεστές για τους οποίους αποδεικνύεται [44] το επόμενο βασικό θεώρημα,

Θεώρημα 2.3. Έστω $f = (F, G)^T$ τοπικά Hölder συνεχής με $f \in L^1([0, T], \mathcal{X})$ όπου $\mathcal{X} := H_0(\text{curl}, \Omega) \times H(\text{curl}, \Omega)$ και $u^\varepsilon = (E^\varepsilon, H^\varepsilon)^T$ είναι η λύση του συστήματος Maxwell

$$\begin{aligned} (d^\varepsilon)' &= M u^\varepsilon + f, \quad x \in \Omega, t \in [0, T] \\ u^\varepsilon &= 0, \quad x \in \Omega, t = 0 \\ \hat{n} \times E^\varepsilon &= 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \end{aligned}$$

όπου $d^\varepsilon = A^\varepsilon u^\varepsilon + G_d^\varepsilon * u^\varepsilon$. Τότε

$$u^\varepsilon \xrightarrow{*} u^* \text{ στον } L^\infty([0, T], \mathcal{X})$$

όπου $u^* = (E^*, H^*)^T$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος Maxwell

$$(d^*)' = M u^* + f, \quad \Omega \times (0, T)$$

με τη συνθήκη τέλειου αγωγού και

$$d^* = A^h u^*$$

με $A^h = \begin{pmatrix} \epsilon_L^h & \xi_L^h \\ \zeta_L^h & \mu_L^h \end{pmatrix}$ όπου $\epsilon_L^h, \xi_L^h, \zeta_L^h$ και μ_L^h οι 3×3 πίνακες που ορίσαμε παραπάνω.

2.3 Ομοιογενοποίηση με τη μέθοδο του τελεστή περιοδικής εκδίπλωσης

2.3.1 Εισαγωγή

Έστω Ω ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$, μια συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ και $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ μια Υ -περιοδική φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση με $a(y) \geq a_0 > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\text{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f \text{ στο } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 \text{ επί του } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.52)$$

όπου $a^\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon})$, u^ε η λύση, κατάλληλης ομαλότητας και $\varepsilon = \varepsilon_n$ μια μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αντικείμενο της θεωρίας της ομοιογενοποίησης, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, είναι η μελέτη της οριακής συμπεριφοράς της ακολουθίας των λύσεων u^ε του παραπάνω προβλήματος, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, όπως επίσης και η εύρεση της μ.δ.ε. που ικανοποιεί το όριο u^0 (ως προς κάποια τοπολογία) της u^ε .

Πρώτο βήμα αντιμετώπισης του προβλήματος ομοιογενοποίησης του (2.52) είναι η ασθενής διατύπωση αυτού, ως εξής:

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \text{ στον } H_0^1(\Omega) \quad (2.53)$$

όπου $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0|\partial\Omega\}$ είναι ένας χώρος Hilbert. Προφανώς, η λύση u^ε αναζητείται στον $H_0^1(\Omega)$. Αποδεικνύεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ασθενείς λύσεις $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ φραγμένες στον ανακλαστικό χώρο $H_0^1(\Omega)$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Eberlein-Smuljan υπάρχει υπακολουθία u^ε και $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ ώστε $u^\varepsilon \rightharpoonup u^0$. Επίσης, αφού η u^ε είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$, η ∇u^ε είναι φραγμένη στον $L^2(\Omega)$, οπότε από το ίδιο θεώρημα υπάρχει $x_0 \in L^2(\Omega)$ και υπακολουθία ∇u^ε ώστε $\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup x_0$ στον $L^2(\Omega)$.

Εξ'αλλου, επειδή η συνάρτηση a είναι $Y = [0, 1]^3$ -περιοδική η $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ είναι εY -περιοδική και $a^\varepsilon \rightharpoonup \int_Y a(y) dy$ στον $L^2(\Omega)$ αν $a \in L^2_{per}(Y)$ ή $a \xrightarrow{*} \int_Y a(y) dy$ αν $a \in L^\infty_{per}(Y)$.

Επομένως, στο αριστερό μέλος της (2.53) έχουμε γινόμενο δυο ασθενών συγκλινουσών συναρτήσεων στον $L^2(\Omega)$. Στη μελέτη της σύγκλισης της u^ε είναι βασικό βήμα το πέρασμα του ορίου στους παράγοντες του γινομένου $a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ κάτι που δεν είναι δυνατόν στην περίπτωση της ασθενούς σύγκλισης, αφού αν $u_n \rightharpoonup u$ στον $L^p(\Omega)$ και $v_n \rightharpoonup v$ στον $L^p(\Omega)$ τότε γενικά $u_n \cdot v_n \not\rightharpoonup u \cdot v$, όπως καθιστά φανερό το ακόλουθο αντιπαράδειγμα.

Οι ακολουθίες $u^\varepsilon(x) = \cos(\frac{x}{\varepsilon})$ και $v^\varepsilon(x) = \cos(\frac{x}{\varepsilon})$ συγκλίνουν ασθενώς [14] προς στο 0, στον $L^2(a, b)$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ ενώ η ακολουθία γινόμενο $u^\varepsilon(x)v^\varepsilon(x) = \cos^2(\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{2x}{\varepsilon}))$ συγκλίνει ασθενώς προς το $\frac{1}{2} \neq 0 \cdot 0 = 0$, αφού και η ακολουθία $\cos(\frac{2x}{\varepsilon}) \rightharpoonup 0$ στον $L^2(a, b)$.

Το παραπάνω πρόβλημα λύθηκε κατασκευάζοντας συναρτήσεις δοκιμής ειδικού τύπου στη βάση του λήμματος $\text{div} - \text{curl}$ από τους Murat και Tartar το 1978. Το λήμμα $\text{div} - \text{curl}$ διατυπώνεται [44] και ως εξής:

Πρόταση 2.4. Έστω ακολουθίες $\{u_n\}, \{v_n\}$ στον $L^2(\Omega)^3$ και πεδία $u, v \in L^2(\Omega)^3$ τέτοια ώστε

$$u_n \rightharpoonup u \text{ και } v_n \rightharpoonup v$$

ασθενώς στον $L^2(\Omega)^3$. Αν το σύνολο $\{\text{div } u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές στον $H^{-1}(\Omega)$ και $\{\text{curl } v_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές στον $(H^{-1}(\Omega))^{3 \times 3}$, τότε

$$u_n \cdot v_n \rightharpoonup u \cdot v$$

στον $D'(\Omega)$.

Μια άμεση λύση του προβλήματος εμφανίστηκε το 1989 με την ονομαζόμενη σύγκλιση διπλής κλίμακας απο τον G. Nguetseng [36] η οποία επεκτάθηκε στη συνέχεια από τον G. Allaire [2] το 1992 με εφαρμογές στην ομοιογενοποίηση. Το όριο διπλής κλίμακας μιας ακολουθίας συναρτήσεων της μεταβλητής x είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x και y όπου η μεταβλητή y αναλαμβάνει τη διατήρηση των τοπικών ταλαντώσεων της αρχικής ακολουθίας, στο όριο, πράγμα το οποίο χάνεται στο ασθενές όριο.

Ακολούθως, εισήχθη απο τους Cioranescu, Dambramian, Griso ο τελεστής της περιοδικής εκδίπλωσης, με τη βοήθεια του οποίου αντιμετωπίστηκαν ορισμέ-

νες «ατέλειες» του ορισμού της σύγκλισης διπλής κλίμακας και περιορίστηκαν ορισμένες τεχνικές αποδείξεις.

Ο αρχικός ορισμός του τελεστή περιοδικής εκδίπλωσης που δόθηκε από τους Cioganescu, Donato, Griso, τροποποιήθηκε ελαφρώς από τον Francu [40] για λόγους απλοποίησης ορισμένων αποδείξεων.

2.3.2 Μια περιοδική Γεωμετρία του \mathbb{R}^n

Στον \mathbb{R}^n θεωρούμε το υποσύνολο $Y := [0, 1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ακριβώς μια n -άδα ακεραίων $m := (m_1, m_2, \dots, m_n)$ τέτοια ώστε: $x - m \in Y$. Θέτουμε $x - m := \{x\}_Y$ και $m := [x]_Y$ οπότε έχουμε

$$x = [x]_Y + \{x\}_Y, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.54)$$

Το $[x]_Y$ λέγεται (διάνυσμα) ακέραιο μέρος του x και το $\{x\}_Y$ κλασματικό μέρος του $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω πλέον ένα $\varepsilon > 0$. Από την (2.54) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$x = \varepsilon([\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \{\frac{x}{\varepsilon}\}_Y) \quad (2.55)$$

και επομένως κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει σε ένα μόνο σύνολο της μορφής $\varepsilon(m_\varepsilon + Y)$, όπου $m_\varepsilon = [\frac{x}{\varepsilon}]_Y \in \mathbb{Z}^n$ οπότε έχουμε

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(m + Y) \quad (2.56)$$

με $m = m_\varepsilon$ και $\varepsilon(m + Y) \cap \varepsilon(n + Y) = \emptyset$ για $m \neq n$.

Έστω πλέον Ω ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n και ένα $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τα επόμενα υποσύνολα

$$\mathbb{Z}_\varepsilon^n := \{m \in \mathbb{Z}^n : \varepsilon(m + Y) \subset \Omega\}$$

$$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \varepsilon(m + Y)^0$$

$$\Lambda_\varepsilon := \Omega - \Omega_\varepsilon$$

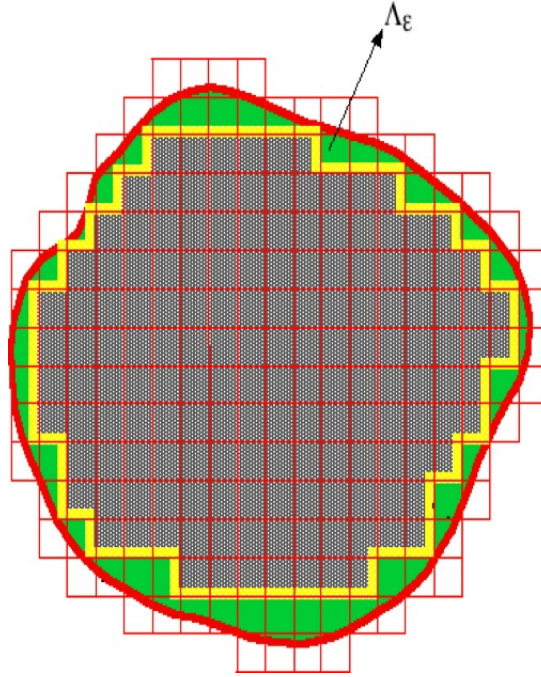
που είναι χρήσιμα στον ορισμό της περιοδικής εκδίπλωσης.

2.3.3 Ορισμός και Ιδιότητες του Τελεστή Περιοδικής Εκδίπλωσης

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{Z}^3$. Με $\varepsilon(m + Y)$ συμβολίζουμε το σύνολο των στοιχείων του \mathbb{R}^3 της μορφής: $\varepsilon m + \varepsilon y$ καθώς το y διατρέχει το κελί αναφοράς

$Y = [0, 1]^3$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\varepsilon^3 &:= \{m \in \mathbb{Z}^3 : \varepsilon(m + Y) \subset \Omega\} \\ \Omega_\varepsilon &:= \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon(m + Y) \subseteq \Omega \\ \Lambda_\varepsilon &:= \Omega - \Omega_\varepsilon \subseteq \Omega. \end{aligned} \quad (2.57)$$



Αξιοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.5. Έστω $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty)$ και $\varepsilon > 0$. Ως ε -εκδίπλωση της u στο $\Omega \times Y$ ορίζεται η συνάρτηση

$$T_\varepsilon u : \Omega \times Y \mapsto \mathbb{R} \quad \mu \in T_\varepsilon u(x, y) = \begin{cases} u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y), & (x, y) \in \Omega_\varepsilon \times Y \\ u(x), & (x, y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y \end{cases} \quad (2.58)$$

και τελεστής ε -εκδίπλωσης λέγεται η απεικόνιση

$$T_\varepsilon : L^p(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^p(\Omega \times Y; \mathbb{R}) : u \mapsto T_\varepsilon u. \quad (2.59)$$

Ο ορισμός που δόθηκε από τους $C - D - G$ διαφέρει από τον ανωτέρω στο ότι $T_\varepsilon u(x, y) = 0$ για $(x, y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y$. Ο ορισμός (2.5) γράφεται ισοδύναμα και ως εξής:

$$T_\varepsilon u(x, y) = u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y)\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u(x)\chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \quad (2.60)$$

όπου χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του υποσυνόλου A του Ω .

Με την κατά συντεταγμένη ή κατά στοιχείο δράση ορίζεται ο τελεστής - εκδίπλωσης για διανύσματα ή πίνακο-συναρτήσεις. Τότε από τον ορισμό του τελεστή T_ε , αν A είναι Y -περιοδικός πίνακας και $A^\varepsilon(x) := A(\frac{x}{\varepsilon})$ για $(x, y) \in (\Omega_\varepsilon \times Y)$ προκύπτει

$$(T_\varepsilon A^\varepsilon)(x, y) = A^\varepsilon \left(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \varepsilon y \right) = A \left(\left\{ \frac{\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \varepsilon y}{\varepsilon} \right\} \right) = A \left(\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + y \right\} \right) = A(y). \quad (2.61)$$

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν [16] οι επόμενες χρήσιμες για τα ακόλουθα, αλγεβρικές ιδιότητες του τελεστή T_ε .

Θεώρημα 2.6. *Ο τελεστής $T_\varepsilon, \varepsilon > 0$ είναι:*

- γραμμικός στον $L^2(\Omega)$, δηλαδή ισχύει:

$$T_\varepsilon(au + bv) = a T_\varepsilon u + b T_\varepsilon v, \text{ για κάθε } u, v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R} \quad (2.62)$$

- πολλαπλασιαστικός, δηλαδή ισχύει:

$$T_\varepsilon(uv) = (T_\varepsilon u)(T_\varepsilon v) \text{ για κάθε } u, v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}) \quad (2.63)$$

Απόδειξη. 1. Για $u, v \in L^p(\Omega)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(au + bv)(x, y) &= (au + bv) \left(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y \right) \chi_{\Omega_\varepsilon} + (au + bv)(x) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= a[u(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u(x) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] + \\ &\quad + b[v(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + v(x) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] \\ &= a T_\varepsilon u(x, y) + b T_\varepsilon v(x, y) \\ &= (a T_\varepsilon u + b T_\varepsilon v)(x, y) \end{aligned}$$

2. Έστω $u, v \in L^p(\Omega)$ και $(x, y) \in \Omega \times Y$

- Αν $(x, y) \in \Omega_\varepsilon \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(uv)(x, y) &= (uv)(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \mathbf{1} + (uv)(x) \mathbf{0} \\ &= u(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) v(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \\ &= [u(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u(x) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] \\ &\quad [v(\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Y + \varepsilon y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + v(x) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] \\ &= [T_\varepsilon u(x, y)][T_\varepsilon v(x, y)] \\ &= [T_\varepsilon u \cdot T_\varepsilon v](x, y) \end{aligned}$$

- Αν $(x, y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 T_\varepsilon(uv)(x, y) &= (uv)(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y)0 + (uv)(x)1 \\
 &= u(x)v(x) \\
 &= [u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y)\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u(x)\chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] \\
 &\quad [v(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y)\chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + v(x)\chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)] \\
 &= [T_\varepsilon u(x, y)][T_\varepsilon v(x, y)] \\
 &= [T_\varepsilon u \cdot T_\varepsilon v](x, y)
 \end{aligned}$$

Επομένως, $T_\varepsilon(uv)(x, y) = [T_\varepsilon u \cdot T_\varepsilon v](x, y)$. \square

Σημαντική είναι η ιδιότητα του $T_\varepsilon, \varepsilon > 0$ που εκφράζει το επόμενο:

Θεώρημα 2.7. *Ο τελεστής T_ε διατηρεί το ολοκλήρωμα (κατά την πολλαπλασιαστική σταθερά $|Y|$) δηλαδή για κάθε $u \in L^1(\Omega)$ ισχύει*

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} (T_\varepsilon u)(x, y) dx dy, \quad (2.64)$$

Απόδειξη. Έστω $u \in L^1(\Omega)$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u(x) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon \cup \Lambda_\varepsilon} u(x) dx \\
 &= \int_{\Omega_\varepsilon} u(x) dx + \int_{\Lambda_\varepsilon} u(x) dx \\
 &= \int_{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \varepsilon(m+Y)} u(x) dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Lambda_\varepsilon} |Y|u(x) dx \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \int_{\varepsilon(m+Y)} u(x) dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Lambda_\varepsilon} \int_Y dy u(x) dx \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \int_Y u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y) \varepsilon^n dy + \frac{1}{|Y|} \int_{\Lambda_\varepsilon} \int_Y u(x) dy dx \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \int_Y u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y) \left(\int_{\varepsilon(m+Y)} dx \frac{1}{|Y|} \right) dy + \frac{1}{|Y|} \int_{\Lambda_\varepsilon \times Y} u(x) dy dx
 \end{aligned}$$

και συνεχίζοντας

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u(x) dx &= \frac{1}{|Y|} \sum_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon^n} \int_{\varepsilon(m+Y)} \int_Y u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y) dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Lambda_\varepsilon \times Y} u(x) dy dx \\
 &= \frac{1}{|Y|} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} \int_Y u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y) dy dx + \int_{\Lambda_\varepsilon \times Y} u(x) dy dx \right] \\
 &= \frac{1}{|Y|} \left[\int_{\Omega_\varepsilon \times Y} T_\varepsilon u(x, y) dy dx + \int_{\Lambda_\varepsilon \times Y} T_\varepsilon u(x, y) dy dx \right] \\
 &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon u(x, y) dy dx
 \end{aligned}$$

□

Σχόλια

- Στην εισαγωγή αναφέραμε ότι το ε συμβολίζει μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία $\varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$ θετικών πραγματικών αριθμών. Τα υποσύνολα Ω_ε όπως ορίστηκαν παραπάνω αποτελούν μια άξουσα ακολουθία $\Omega_{\varepsilon_n}, n = 1, 2, \dots$ υποσυνόλων του Ω . Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_{\varepsilon_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon_n} = \Omega$$

Τα υποσύνολα Λ_ε αποτελούν μια φθίνουσα ακολουθία $\Lambda_{\varepsilon_n}, n = 1, 2, \dots$ υποσυνόλων του Ω και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{\varepsilon_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\varepsilon_n} = \emptyset$$

- Ο τελεστής εκδίπλωσης $T_\varepsilon, \varepsilon > 0$ μετασχηματίζει μια συνάρτηση $u(x)$ μιας μεταβλητής $x \in \mathbb{R}^n$ σε μια συνάρτηση $\hat{u}_\varepsilon(x, y) := u(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon y)$ δύο μεταβλητών x και y όπου $y \in Y$. Σε κάθε κύβο $\varepsilon(m + Y) \times Y$ η συνάρτηση $\hat{u}_\varepsilon(x, y)$ είναι σταθερή ως προς τη μεταβλητή x γιατί για όλα τα $x \in \varepsilon(m + Y)$ είναι $[\frac{x}{\varepsilon}] = m$.
- Η σημασία της ισότητας (9) είναι σημαντική για τη θεωρία της ομοιογενοποίησης γιατί μας επιτρέπει να μετασχηματίζουμε ολοκληρώματα πάνω στο Ω σε ολοκληρώματα πάνω στο $\Omega \times Y$ και να εφαρμόζουμε στη συνέχεια ιδιότητες σύγκλισης του T_ε που εξυπηρετούν σκοπούς της ομοιογενοποίησης. Εξ' άλλου από την (8) για $u = v$ παίρνουμε

$$T_\varepsilon u^2 = (T_\varepsilon u)^2 \quad (2.65)$$

οπότε υποθέτοντας ότι $u \in L^2(\Omega)$ από την (9) προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(x) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_{\varepsilon} u^2(x, y) dy dx \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} (T_{\varepsilon} u)^2(x, y) dy dx \end{aligned}$$

και επομένως

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{|Y|}} \|T_{\varepsilon} u\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Παρόμοια προκύπτει ότι για μια συνάρτηση $u \in L^p(\Omega)$ με $p \in [1, +\infty)$. Ισχύει

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{|Y|}} \|T_{\varepsilon} u\|_{L^p(\Omega \times Y)}. \quad (2.66)$$

Από την (2.66) προκύπτει ότι ο T_{ε} είναι μια γραμμική ισομετρία, ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά, την $\frac{1}{\sqrt{|Y|}}$, μεταξύ των $L^p(\Omega)$ και $L^p(\Omega \times Y)$. Αν ως μέτρο Lebesgue στον Y θεωρήσουμε το $d\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{|Y|}} dy$ η (2.66) μετατρέπεται σε μια ακριβή ισομετρία μεταξύ των χώρων αυτών.

- Στην περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^n$, λαμβάνοντας υπόψη την (3) η ε-εκδίπλωση μιας συνάρτησης $u \in L^p(\Omega)$ είναι η συνάρτηση

$$T_{\varepsilon} u : \mathbb{R}^n \times Y \mapsto \mathbb{R} \text{ με } T_{\varepsilon} u(x, y) = u\left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right), \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y$$

και η απεικόνιση

$$T_{\varepsilon} : L^p(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n \times Y) : u \mapsto T_{\varepsilon} u$$

είναι ο τελεστής εκδίπλωσης.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι και ισότητες

- $T_{\varepsilon} u(x, \{\frac{x}{\varepsilon}\}_Y) = u(x)$ για κάθε $x \in \Omega$
- $T_{\varepsilon} u(x + \varepsilon k, y - k) = T_{\varepsilon} u(x, y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, y \in Y, k \in \mathbb{Z}^n$

Θεώρημα 2.8. Έστω μια Y -περιοδική συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Αν $u_{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με $u_{\varepsilon}(x) := u(\frac{x}{\varepsilon})$ τότε ισχύουν

1. Η u_{ε} είναι εY -περιοδική
2. $T_{\varepsilon} u_{\varepsilon}(x, y) = u(y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y$
3. Αν $u \in L^p(Y)$ τότε, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

- $u_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y u(y) dy$ στον $L^p(\Omega)$, για κάθε ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^n , αν $p \in [1, +\infty)$
- $u_\varepsilon \xrightarrow{*} \frac{1}{|Y|} \int_Y u(y) dy$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, αν $p = +\infty$

4. Αν $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$ τότε $T_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega \times Y)$

Απόδειξη. 1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x + \varepsilon e_i) &= u\left(\frac{x}{\varepsilon} + e_i\right) \\ &= u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= u_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

2. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_\varepsilon u_\varepsilon(x, y) &= u_\varepsilon\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right) \\ &= u\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + y\right) \\ &= u(y) \end{aligned}$$

3. Βλέπε [13]

4. Για κάθε $(x, y) \in \Omega \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_\varepsilon u^\varepsilon(x, y) &= u_\varepsilon\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u_\varepsilon \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= u\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + y\right) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= u(y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_{Y + \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y}\right) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= u(y) \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) + u\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= u(y)(1 - \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x)) + u\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &= u(y) + (u\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right) - u(y)) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon u_\varepsilon(x, y) - u(y)| &= |u\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right) - u(y)| \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &\leq (|u\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right)| + |u(y)|) \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x) \\ &\leq 2 \sup_{z \in Y} |u(z)| \chi_{\Lambda_\varepsilon}(x). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Όμως για ένα σταθερό $x \in \Omega$ η απεικόνιση

$$\mu_x : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}} : A \mapsto \mu_x(A) := \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

είναι ένα μέτρο στο Ω , όπου \mathcal{A} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω . Επομένως, η (2.67) γράφεται

$$|T_\varepsilon u_\varepsilon(x, y) - u(y)| \leq 2 \sup_{z \in Y} |u(z)| \mu_x(\Lambda_\varepsilon) \quad (2.68)$$

Από την οποία, επειδή $\Lambda_\varepsilon \rightarrow \emptyset$, $\mu_x(\Lambda_\varepsilon) < +\infty$ και $\mu_x(\Lambda_\varepsilon) \rightarrow \mu_x(\emptyset) = 0$ προκύπτει ότι:

$$|T_\varepsilon u_\varepsilon(x, y) - u(y)| \rightarrow 0 \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.69)$$

για κάθε $(x, y) \in \Omega \times Y$.

Από τη (2.69) και επειδή Ω φραγμένο συμπεραίνουμε ότι

$$T_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow u \text{ στον } L^p(\Omega \times Y) \text{ για κάθε } p \in [1, +\infty) \quad (2.70)$$

□

2.4 Ιδιότητες σύγκλισης του τελεστή εκδίπλωσης στον $L^p(\Omega)$

Θεώρημα 2.9. Έστω $p \in [1, +\infty)$

1. Αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $T_\varepsilon u \rightarrow u$, ισχυρώς στον $L^p(\Omega \times Y)$
2. Αν $\{u_\varepsilon\}$ είναι ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ ισχυρώς στον } L^p(\Omega)$$

τότε και $T_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow u$ ισχυρώς στον $L^p(\Omega \times Y)$

Απόδειξη. α)

- Έστω ότι $u \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$. Θέτουμε $t_\varepsilon(x, y) = \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y$. Από τον ορισμό του διανυσματικού ακεραίου μέρους έχουμε

$$\frac{x}{\varepsilon} - 1 < \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y \leq \frac{x}{\varepsilon}, x \in \mathbb{R}^n$$

οπότε διαδοχικά προκύπτει

$$x - \varepsilon < \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y \leq x \quad (2.71)$$

$$x - \varepsilon(1 - y) < \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y \leq x + \varepsilon y \quad (2.72)$$

$$x - \varepsilon(1 - y) < t_\varepsilon(x, y) \leq x + \varepsilon y \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n, y \in T \quad (2.73)$$

από την οποία παίρνουμε $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon(x, y) = x$ από την οποία, εξ' αιτίας της συνέχειας της u συνεπάγεται ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t_\varepsilon(x, y)) = u(x)$ δηλαδή $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon u(t_\varepsilon(x, y)) = u(x)$ οπότε $T_\varepsilon u \rightarrow u$ ισχυρώς στον $L^p(\Omega \times Y)$.

- Έστω ότι $u \in L^p(\Omega)$. Για κάθε $\phi \in D(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} &= \|T_\varepsilon u - T_\varepsilon \phi + T_\varepsilon \phi - \phi + \phi - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \\ &= \|T_\varepsilon(u - \phi) + (T_\varepsilon \phi - \phi) + (\phi - u)\|_{L^p(\Omega \times Y)} \\ &\leq \|T_\varepsilon(u - \phi)\|_{L^p(\Omega \times Y)} + \|T_\varepsilon \phi - \phi\|_{L^p(\Omega \times Y)} + \|\phi - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \\ &= |Y|^{\frac{1}{p}} \|u - \phi\|_{L^p(\Omega)} + \|T_\varepsilon \phi - \phi\|_{L^p(\Omega \times Y)} + \|u - \phi\|_{L^p(\Omega \times Y)}. \end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $w \in L^p(\Omega)$ έχουμε

$$\|w\|_{L^p(\Omega \times Y)}^p = \int \Omega \int_Y |w(x)|^p dy dx = \int_\Omega |w(x)|^p dx \int_Y dy = |Y| \|w\|_{L^p(\Omega)}^p$$

οπότε $\|w\|_{L^p(\Omega \times Y)} = |Y|^{\frac{1}{p}} \|w\|_{L^p(\Omega)}$ οπότε για $w = u - \phi$ παίρνουμε

$$\|T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \leq 2|Y|^{\frac{1}{p}} \|u - \phi\|_{L^p(\Omega)} + \|T_\varepsilon \phi - \phi\|_{L^p(\Omega \times Y)}$$

από την οποία λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω, ότι για $u \in D(\Omega)$ ισχύει: $T_\varepsilon u \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega \times Y)$ είναι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon \phi - \phi\|_{L^p(\Omega \times Y)} = 0$ και επομένως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \leq 2|Y|^{\frac{1}{p}} \|u - \phi\|_{L^p(\Omega)} \quad (2.74)$$

Αλλά το $D(\Omega)$ είναι πυκνό στον $L^p(\Omega)$ οπότε για κάθε $u \in L^p(\Omega) : \exists \phi_n \in D(\Omega) : \phi_n \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega)$ δηλαδή $\|u - \phi_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, οπότε από την (2.74) έχουμε $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)}$ που σημαίνει ότι $T_\varepsilon u - u$ στον $L^p(\Omega \times Y)$.

- Με εφαρμογή της (2.69) έχουμε

$$\|T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon u\|_{L^p(\Omega \times Y)} = \|T_\varepsilon(u_\varepsilon - u)\|_{L^p(\Omega \times Y)} = |Y|^{\frac{1}{p}} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

γιατί $u_\varepsilon \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega)$, άρα:

$$\|T_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \rightarrow 0 \quad (2.75)$$

Τότε

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} &= \|T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon u + T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \\ &\leq \|T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon u\|_{L^p(\Omega \times Y)} + \|T_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \end{aligned}$$

το 2^ο μέλος της οποίας τείνει στο 0 εξ' αιτίας της (2.75) και του πρώτου συμπεράσματος του θεωρήματος, οπότε προκύπτει

$$\|T_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega \times Y)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow T_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow u \text{ στον } L^p(\Omega \times Y).$$

□

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε μια ακόμη ιδιότητα σχετική με τη δράση του T_ε σε συναρτήσεις του $L^p(\Omega)$ και ακολούθως θα προχωρήσουμε σε ιδιότητες του T_ε όταν αυτός δρα σε συναρτήσεις μεγαλύτερης ομαλότητας.

Θεώρημα 2.10. Έστω $\{u_\varepsilon \subset L^p(\Omega)\}$ ακολουθία φραγμένη και τέτοια ώστε $T_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ ασθενώς στον $L^p(\Omega \times Y)$, $1 \leq p < \infty$. Τότε:

$$u_\varepsilon \rightarrow u := \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{u} dy := M_Y(\hat{u})$$

ασθενώς στον $L^p(\Omega)$.

2.4.1 Σύγκλιση διπλής κλίμακας

Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση της σύγκλισης διπλής κλίμακας μιας ακολουθίας $\{u_\varepsilon\}$ στον $L^p(\Omega)$ με τη σύγκλιση της ακολουθίας $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$ στον $L^p(\Omega \times Y)$. Αρχικά, υπενθυμίζουμε τον επόμενο ορισμό της σύγκλισης διπλής κλίμακας, που οφείλεται στον Nguetseng.

Έστω $p \in (1, +\infty)$. Μια φραγμένη ακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ στον $L^p(\Omega)$ συγκλίνει κατά διπλή κλίμακα προς κάποιο $u \in L^p(\Omega \times Y)$ και γράφουμε $u_\varepsilon \xrightarrow{2-sc} u \in L^p(\Omega \times Y)$ όταν για κάθε λεία συνάρτηση ϕ επί του $\Omega \times Y$ ισχύει

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y u(x, y) \phi(x, y) dx dy \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Ως συναρτήσεις δοκιμής ϕ , στον παραπάνω ορισμό μπορούν να χρησιμοποιηθούν στοιχεία των χώρων

$$C_0^\infty(\Omega, C_\#^\infty(Y)), L^q(\Omega, L_\#^q(Y)), L^q(\Omega, C_\#(Y))$$

και για φραγμένο Ω ο $L_\#^q(Y, C(\bar{\Omega}))$.

Για τους τρεις τελευταίους χώρους η ϕ πρέπει να ικανοποιεί και την

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^q(\Omega)} = \|\phi(x, y)\|_{L^q(\Omega \times Y)}.$$

Στα παραπάνω όταν $p = 2$ θα είναι και $q = 2$ σε κάθε άλλη περίπτωση το q ικανοποιεί την $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ύστερα από τα παραπάνω δίνουμε το επόμενο θεώρημα που ανάγει τη σύγκλιση κατά διπλή κλίμακα της $\{u_\varepsilon\}$ σε μια ασθενή σύγκλιση της εκδίπλωσης $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$ της $\{u_\varepsilon\}$.

Θεώρημα 2.11. Έστω $\{u_\varepsilon\}$ μια φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\Omega)$ με $p \in (1, +\infty)$. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$ συγκλίνει ασθενώς στο $u \in L^p(\Omega \times Y)$
2. $\{u_\varepsilon\}$ συγκλίνει κατά διπλή κλίμακα στο $u \in L^p(\Omega \times Y)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της παραπάνω ισοδυναμίας στηρίζεται στις ιδιότητες

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \frac{1}{|Y|} (T_\varepsilon u_\varepsilon)(x, y) dx dy$$

$$T_\varepsilon(uv) = (T_\varepsilon u)(T_\varepsilon v)$$

και στο ότι για μια συνάρτηση ϕ από ένα χώρο αποδεκτών συναρτήσεων δοκιμής για τη σύγκλιση διπλής κλίμακας, η ακολουθία $\{T_\varepsilon[\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})]\}$ συγκλίνει ισχυρώς προς τη $\phi \in L^q(\Omega \times Y)$. \square

Παρατηρήσεις:

Το παραπάνω θεώρημα είναι διπλά χρήσιμο:

- Ανάγει τη σύγκλιση κατά διπλή κλίμακα μιας $\{u_\varepsilon\}$ του $L^p(\Omega)$ σε ασθενή σύγκλιση της $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$ του $L^p(\Omega \times Y)$
- Οι ιδιότητες σύγκλισης της $\{u_\varepsilon\}$ κατά 2-πλή κλίμακα δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες για την $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$.

Στα επόμενα θα δώσουμε ιδιότητες σύγκλισης για την $\{T_\varepsilon u_\varepsilon\}$ υποθέτοντας μεγαλύτερη ομαλότητα απο αυτήν ενός $L^p(q'wrou)$ για την $\{u_\varepsilon\}$.

Θεώρημα 2.12. Έστω $\{u_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega) : \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c$ για κάθε $\varepsilon > 0$ όπου $c > 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ της $\{u_\varepsilon\}$ και $u \in H^1(\Omega)$ ώστε να ισχύουν

- $\{u_\varepsilon\} \rightharpoonup u$ στον $H^1(\Omega)$
- $T_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y u_1$ όπου $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$

Θεώρημα 2.13. Έστω $\{u_\varepsilon\} \subset H(\text{div}, \Omega) : \|u_\varepsilon\|_{H(\text{div}, \Omega)} \leq c$ για κάθε $\varepsilon > 0$ όπου $c > 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ της $\{u_\varepsilon\}$ και $u \in H(\text{div}, \Omega)$ ώστε να ισχύουν

- $\{u_\varepsilon\} \rightharpoonup u$ στον $H(\text{div}, \Omega)$
- $T_\varepsilon(\text{div} u_\varepsilon) \rightharpoonup \text{div}_x u + \text{div}_y u_1$ όπου $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\text{div}, Y))$

Θεώρημα 2.14. Έστω $\{u_\varepsilon\} \subset H(\text{curl}; \Omega) : \|u_\varepsilon\|_{H(\text{curl}; \Omega)} \leq c$ για κάθε $\varepsilon > 0$ όπου $c > 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{u_\varepsilon\}$ της $\{u_\varepsilon\}$ και τρία πεδία

$$u \in H(\text{curl}; \Omega), \bar{u} \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y; \mathbb{R})) \quad (2.76)$$

$$\hat{u} \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y; \mathbb{R}^3)) \mu \in \text{div}_y \hat{u} = 0 \quad (2.77)$$

ώστε να ισχύουν

- $\{u_\varepsilon\} \rightharpoonup u$ στον $H(\text{curl}; \Omega)$
- $T_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u + \nabla_y \bar{u}$ στον $L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^3)$
- $T_\varepsilon(\text{curl} u_\varepsilon) \rightharpoonup \text{curl}_x u + \text{curl}_y \hat{u}$ στον $L^2(\Omega \times Y, \mathbb{R}^3)$.

2.4.2 Ομοιογενοποίηση του ελλειπτικού προβλήματος (2.52) με τη βοήθεια του τελεστή εκδίπλωσης

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένας φραγμένος τόπος του \mathbb{R}^3 και ότι $a^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{3 \times 3}$ με $x \in \Omega$ πίνακας που ικανοποιεί την

$$(a^\varepsilon(x)\xi; \xi) \geq a|\xi|^2 \text{ για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^3 \quad (2.78)$$

Για δοσμένο $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ ενδιαφερόμαστε για την ομοιογενοποίηση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f, & \Omega \\ u^\varepsilon = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (2.79)$$

Λύση: Έστω $v \in H_0^1(\Omega)$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.79) με v και ολοκληρώνουμε στο Ω

$$-\int_{\Omega} v \operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) dx + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.80)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) dx &= \int_{\Omega} [\operatorname{div}(v a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) - \operatorname{grad} v \cdot a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon] dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(v a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) - \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon \cdot n ds_x - \int_{\Omega} \nabla v \cdot a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla v \cdot a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon dx \text{ όπου } (v \in H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (2.80) παίρνουμε

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.81)$$

για κάθε $v \in H_0^1$. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + \lambda u \cdot v) dx, \quad (2.82)$$

όπου $u, v \in H_0^1$ και a ο πίνακας 3×3 που ικανοποιεί την (2.78). Αποδεικνύεται ότι b 2-γραμμική μορφή, συνεχής και αξιολογώντας την ανισότητα Poincaré

προκύπτει ότι είναι και πιεστική. Επίσης, είναι φανερό ότι το συναρτησιακό $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$ είναι γραμμικό και συνεχές. Το (2.81) γράφεται πλέον

$$b(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$. Επομένως, σύμφωνα με το λήμμα Lax-Milgram, υπάρχει ακριβώς ένα $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (2.83)$$

για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$ που ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \gamma > 0 \quad (2.84)$$

Θεώρημα 2.15. Αν οι πίνακες a^ε , $\varepsilon > 0$ ικανοποιούν την (2.78), υπάρχει πίνακας β 3×3 τέτοιος ώστε $\beta^\varepsilon = T_\varepsilon a^\varepsilon \rightarrow \beta$ ισχυρώς στον $[L^1(\Omega \times Y)]^{3 \times 3}$ και $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ είναι η μοναδική λύση της (2.83), τότε υπάρχουν πεδία $u \in H_0^1(\Omega)$ και $\hat{u} \in L^2(\Omega; H_{per}^1(Y))$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightharpoonup u, \text{ ασθενώς στον } H_0^1(\Omega) \\ T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) &\rightharpoonup \nabla u + \nabla_y \hat{u}, \text{ ασθενώς στον } L^2(\Omega \times Y) \end{aligned} \quad (2.85)$$

και το ζεύγος (u, \hat{u}) είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \text{για κάθε } \psi \in H_0^1(\Omega), \text{ για κάθε } \phi \in L^2(\Omega, H_{per}^1(Y)) \text{ ισχύει} \\ \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta x, y [\nabla u(x) + \nabla_y \hat{u}(x, y)] [\nabla \psi(x) + \nabla_y \phi(x, y)] dx dy \\ + \lambda \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} u \psi dx dy = \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \end{cases} \quad (2.86)$$

Επιπλέον, υπάρχει ένας ισχυρός διορθωτής για το ∇u^ε δηλαδή

$$\nabla u^\varepsilon \rightarrow \nabla_x u + V^\varepsilon(\nabla_y \hat{u}) \text{ στον } L^2(\Omega) \quad (2.87)$$

όπου V^ε είναι ο τελεστής της μέσης τιμής που ορίζεται από την

$$V^\varepsilon(v(x)) := \frac{1}{|Y|} \int_Y v(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}]_Y + \varepsilon z, \{\frac{x}{\varepsilon}\}_Y) dz.$$

Απόδειξη. Επειδή η u^ε σύμφωνα με την (2.84) είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$, υπάρχουν $u \in H_0^1(\Omega)$ και $\hat{u} \in L^2(\Omega; H_{per}^1(Y))$ ώστε (ιδιότητες του τελεστή εκδίπλωσης, θεώρημα 2.7)

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στον } H_0^1(\Omega) \quad (2.88)$$

$$T_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ ασθενώς στον } L^2(\Omega; H^1(Y)) \quad (2.89)$$

$$T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y \hat{u} \text{ ασθενώς στον } L^2(\Omega \times Y) \quad (2.90)$$

Από την (2.83) για $v = v^\varepsilon$ και εφαρμογή του τύπου

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} (T_\varepsilon u)(x, y) dx dy$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon(a^\varepsilon \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x v^\varepsilon) dx dy + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon(u^\varepsilon \cdot v^\varepsilon) dx dy = \langle f, v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1}$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα $T_\varepsilon(u, v) = T_\varepsilon u T_\varepsilon v$ γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta^\varepsilon T_\varepsilon(\nabla_x u^\varepsilon) \cdot T_\varepsilon(\nabla_x v^\varepsilon) dx dy + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot T_\varepsilon(v^\varepsilon) dx dy \\ = \langle f, v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1} \end{aligned} \quad (2.91)$$

• Για $v^\varepsilon = \Psi(x), \Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ από τη (2.91) με τη βοήθεια των (2.90) και (2.89), της ιδιότητας $T_\varepsilon v \rightarrow v$ στον $L^2(\Omega \times Y)$ για κάθε $v \in L^2(\Omega)$, της $\beta^\varepsilon \rightarrow \beta$ ισχυρώς της βασικής ιδιότητας $u_n \rightarrow u$ και $v_n \rightarrow v$ τότε $u_n \cdot v_n \rightarrow u \cdot v$ παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta(x, y)(\nabla_x u + \nabla_y \hat{u}) \nabla_x \Psi(x) dx dy + \lambda \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} u \Psi dx dy \\ = \langle f, \Psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1} \end{aligned} \quad (2.92)$$

• Για $v^\varepsilon = \varepsilon \Psi(x) \psi(\frac{x}{\varepsilon}), \Psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \in H_{per}^1(Y)$ έχουμε $\nabla v^\varepsilon = \varepsilon \nabla \Psi(x) \psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \Psi \nabla_y \psi(y), v^\varepsilon \rightarrow 0$ στον $H_0^1(\Omega), T_\varepsilon(\nabla v^\varepsilon) \rightarrow \Psi \nabla_y \psi(y), T_\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow 0$ οπότε από την (2.91) προκύπτει

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta(x, y)(\nabla_x u + \nabla_y \hat{u}) \Psi(x) \nabla_x \psi(y) dx dy = 0. \quad (2.93)$$

Με πρόσθεση των (2.92), (2.93) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta(x, y)(\nabla_x u + \nabla_y \hat{u})(\nabla_x \Psi + \nabla_y \Phi(x, y)) dx dy + \frac{\lambda}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} u \Psi dx dy \\ = \langle f, \Psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

δηλαδή το ζεύγος (u, \hat{u}) είναι λύση της (2.86).

Από την (2.91), (2.93) για $\Psi = u$ και $\Phi = \hat{u}$ και από την (2.91) για $v^\varepsilon = u^\varepsilon$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta^\varepsilon T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx dy + \frac{\lambda}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon u^\varepsilon \cdot T_\varepsilon u^\varepsilon dx dy \right] = \langle f, u \rangle \\ = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \beta(x, y)(\nabla_x u + \nabla_y \hat{u})(\nabla_x u + \nabla_y \hat{u}) dx dy + \frac{\lambda}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} u^2 dx dy \end{aligned}$$

που είναι γνωστή [16] ως σύγκλιση ενεργειών.

Με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται η ισχυρή σύγκλιση

$$T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) \rightarrow \nabla_x u + \nabla_y \hat{u} \text{ στον } L^2(\Omega \times Y)$$

η οποία με τη βοήθεια και της ισχυρής σύγκλισης $T_\varepsilon(\nabla_x u) \rightarrow \nabla_x u$ γράφεται

$$T_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon - \nabla_x u) \rightarrow \nabla_y \hat{u} \text{ στον } L^2(\Omega \times Y)$$

από την οποία σύμφωνα με το θεώρημα 3.7 του [16], [8] παίρνουμε

$$\nabla u^\varepsilon \rightarrow \nabla_x u + V^\varepsilon(\nabla_y \hat{u}) \text{ στον } L^2(\Omega)$$

όπου V^ε ο τελεστής μέσης τιμής. □

Σχόλιο: Στην παράγραφο 2.2.1 αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα της ομοιογενοποίησης του τελεστή

$$\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div}(a^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon$$

με τη μέθοδο των αναπτυγμάτων και βρήκαμε μετά από μια πολύπλοκη διαδικασία τύπο για τον ομοιογενοποιημένο τελεστή.

Στην παρούσα παράγραφο 2.3.4 αντιμετωπίσαμε την ομοιογενοποίηση του ίδιου τελεστή αλλά με την πιο αυστηρή μέθοδο της περιοδικής εκδίπλωσης. Το ασθενές όριο της λύσης εδώ προκύπτει ως λύση μιας εξίσωσης με δύο συναρτήσεις ελέγχου και μας δίνει τη δυνατότητα εύρεσης του ισχυρού ορίου της κλίσης ∇u^ε μέσω του τελεστή της μέσης τιμής V^ε .

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος του « τελεστή περιοδικής εκδίπλωσης » σε DBF χειρόμορφο περιβάλλον

3.1 Εισαγωγή

Η μαθηματική θεωρία της ομοιογενοποίησης παρουσιάστηκε τη δεκαετία 1970 προκειμένου να περιγράψει την συμπεριφορά των σύνθετων υλικών και άλλων περίπλοκων δομών.

Τα σύνθετα υλικά βρίσκουν πολλές εφαρμογές και τα συναντούμε πολύ συχνά (πχ. τσιμέντο, μπετόν κ.λ.π.) Την περίοδο εκείνη όμως άρχισαν να εμφανίζονται καινούρια σύνθετα υλικά και η κατασκευή τους έγινε πιο εύκολη και πιο συχνή. Χρησιμοποιήθηκαν για προχωρημένες τεχνολογίες με αποτέλεσμα ακόμη και ο σχεδιασμός τους να γίνει μια υψηλού επιπέδου διαδικασία. Σήμερα, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο στην βιομηχανία μιας και με κατάλληλη κατασκευή μπορούν να αποκτήσουν «επιθυμητές» ιδιότητες. Τα υλικά αυτά περιέχουν διάφορα συστατικά τα οποία παρουσιάζουν μια συγκεκριμένη επαναλαμβανόμενη δομή. Έχουν σχεδιαστεί να έχουν καλύτερη συμπεριφορά από την μέση συμπεριφορά των συστατικών τους.

Γενικά, οι ανομοιογένειες σε ένα σύνθετο υλικό είναι μικρές συγκρινόμενες με τις συνολικές του διαστάσεις. Επομένως, χρειαζόμαστε διάφορες κλίμακες προκειμένου να περιγράψουμε ένα τέτοιο υλικό, μία μακροσκοπική που περιγράφει την συνολική συμπεριφορά του υλικού και τουλάχιστον μια μικροσκοπική που θα περιγράψει τις ανομοιογένειες του υλικού.

Στόχος της θεωρίας της ομοιογενοποίησης είναι να παρουσιάσει τις ακριβείς μακροσκοπικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της μικροσκοπικής δομής. Διάφορες μέθοδοι υπάρχουν για την επίτευξη των παραπάνω. Η πρώτη, η οποία εισήχθη από τον Bensoussan, που εφαρμόστηκε ήταν η μέθοδος της «πολλαπλής ανάπτυξης», ακολούθησε ο G. Nguetseng το

1989 με την εισαγωγή της μεθόδου της «διπλής κλίμακας» η οποία χρησιμοποιήθηκε κυρίως από τον Allaire το 1992. Τέλος, οι Cioranescu -Damlamian -Griso το 2002 εισήγαγαν την μέθοδο της «περιοδικής εκδίπλωσης» με την οποία περιορίστηκαν ορισμένες μαθηματικές ατέλειες της «διπλής κλίμακας».

Η βασική ιδέα είναι ότι δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε σωστή κλίμακα, οι ταλαντούμενες συμπεριφορές που εμφανίζει το υλικό μπορεί να μετατραπούν σε ασθeneίς, είτε ακόμη και σε ισχυρές συγκλίσεις με το κόστος της αύξησης της διάστασης του χώρου. Παρόλο που το τίμημα δεν είναι μικρό η απλοποίηση των αποδείξεων είναι ικανοποιητική.

Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι η χρήση της μεθόδου περιοδικής εκδίπλωσης απλοποιεί την διαδικασία ομοιογενοποίησης ουσιαστικά ανάγοντάς το σε πρόβλημα ασθενούς σύγκλισης στον L^2 .

Επίσης, παρέχει μια δυνατότητα στοιχειωδών αποδείξεων των αποτελεσμάτων της «διπλής κλίμακας» σύγκλισης των Nguetseng και Allaire. Η μέθοδος εφαρμόστηκε με επιτυχία σε αρκετά προβλήματα (αρχικά στην ομοιογενοποίηση γραμμικών προβλημάτων στην κλασική περιοδική περίπτωση και κατόπιν σε αυτή με τρύπες.)

Επίσης, βρίσκει εφαρμογές

- στην ελαστικότητα και σύνθετα υλικά
- στις «πλεγματικής -μορφής» (truss-like) δομές, καθώς επίσης,
- στην πολλαπλής κλίμακας περιοδική ομοιογενοποίηση.

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο στις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις Maxwell όταν το υλικό μοντελοποιείται από τις Drude-Born-Fedorov καταστατικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τα «χειρόμορφα υλικά». Η ιδιαιτερότητα των υλικών αυτών είναι ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο συνδέονται και η σύνδεση αυτή εκφράζεται από τον συντελεστή «χειρομορφίας».

3.2 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω Ω ένα ανοιχτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με C^1 σύνορο $\partial\Omega$. Κάτω από τη δράση μιας εξωτερικής πηγής $(J^E, 0)$ όπου J^E η πυκνότητα του ηλεκτρικού πεδίου, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $E = E(x, t)$ και η ένταση του μαγνητικού πεδίου $H = H(x, t)$ στο Ω είναι λύση του επόμενου εξελικτικού προβλήματος

$$\partial_t D = \text{curl } H - J_e, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t B = -\text{curl } E, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

με αρχική συνθήκη

$$E(x, 0) = E^0(x), \quad H(x, 0) = H^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

Η ηλεκτρική διέγερση $D = D(x, t)$ και η μαγνητική διέγερση $B = B(x, t)$ στο Ω συνδέονται με τα E, H με τις καταστατικές εξισώσεις Drude-Born-Fedorov

$$D = \epsilon(E + \beta \operatorname{curl} E), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

$$B = \mu(H + \beta \operatorname{curl} H), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (3.5)$$

όπου $\epsilon = \epsilon(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ η ηλεκτρική επιδεκτικότητα, $\mu = \mu(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ η μαγνητική διαπερατότητα και $\beta = \beta(x)$ το μέτρο χειρομορφίας του υλικού, το οποίο εξαρτάται από το είδος του υλικού που καλύπτει το Ω .

Για τις συναρτήσεις $\epsilon, \mu : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$0 < \epsilon_* \leq \epsilon(x) \leq \epsilon^* < +\infty, \quad 0 < \mu_* \leq \mu(x) \leq \mu^* < +\infty \quad (3.6)$$

για κάθε $x \in \bar{\Omega}$.

Με αντικατάσταση των (3.4),(3.5) στις (3.1) και (3.2) αντίστοιχα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E + \beta \operatorname{curl} E) &= \operatorname{curl} H - J^E \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} (H + \beta \operatorname{curl} H) &= -\operatorname{curl} E \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$A \frac{\partial}{\partial t} L_\beta u = Mu - J \quad (3.7)$$

όπου

$u = u(x, t) := (E(x, t), H(x, t))^T$ το ηλεκτρομαγνητικό 6-διάνυσμα

$$L_\beta \text{ ο πίνακας τελεστής } L_\beta := \begin{pmatrix} \ell_\beta & O_3 \\ O_3 & \ell_\beta \end{pmatrix} \text{ με } \ell_\beta = I + \beta \operatorname{curl} \quad (3.8)$$

I ο ταυτοτικός τελεστής

$$M = \begin{pmatrix} O_3 & \operatorname{curl} \\ -\operatorname{curl} & O_3 \end{pmatrix} \text{ ο τυπικός τελεστής Maxwell} \quad (3.9)$$

J το 6-διάνυσμα πηγής $(J^E, 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon I_3 & O_3 \\ O_3 & \mu I_3 \end{pmatrix} \text{ } 6 \times 6 \text{ συμμετρικός πίνακας για τον οποίο ισχύει } x^T A x \geq \gamma \|x\|^2 \quad (3.10)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^6$ με $\gamma > 0$.

Επομένως, μια αρχική διατύπωση του εξελικτικού προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Πρόβλημα: Ζητείται 6-διάνυσμα $u(t) = u(x, t) = (E, H)^T$ σε κατάλληλο συναρτησιακό χώρο τέτοιο ώστε

$$(P) \begin{cases} A \frac{\partial}{\partial t} L_\beta u &= Mu - J, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.1 Οι συναρτησιακοί χώροι του προβλήματος (3.11) και ο τελεστής DBF

Ο χώρος αναζήτησης της λύσης u του προβλήματος (P) καθορίζεται από περιορισμούς που επάγονται από το είδος των τελεστών που δρουν πάνω στη λύση, τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί η λύση, τις ιδιότητες που επιθυμούμε να έχουν εκείνοι από τους εμπλεκόμενους τελεστές που θα μας επιτρέψουν την εύρεση της λύσης και τέλος από περιορισμούς που προκύπτουν από τη φυσική σημασία της λύσης.

Κρίσιμο ερώτημα για τα επόμενα είναι η φραγμένη αντιστρεψιμότητα, (στο χώρο ορισμού του προβλήματος) του τελεστή L_β ή ισοδύναμα του ℓ_β όπως αυτοί ορίζονται με την (3.8).

3.2.2 Ο τελεστής DBF

Θεωρούμε το ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^3 και το μέτρο χειρομορφίας $\beta : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^*$. Ο τελεστής

$$\ell_\beta : D(\ell_\beta) \subset L^2(\Omega)^3 \mapsto L^2(\Omega)^3, \quad \ell_\beta := I + \beta \operatorname{curl}$$

όπου I ο ταυτοτικός τελεστής του $L^2(\Omega)^3$ και curl ο γνωστός τελεστής που δρά πάνω σε ένα 3-διάνυσμα, λέγεται τελεστής Drude-Born-Fedorov. Ο ℓ_β είναι προφανώς γραμμικός και σημαντικές του ιδιότητες εξαρτώνται από τις ιδιότητες του curl , το είδος της συνάρτησης $\beta(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ και το πεδίο ορισμού του $D(\ell_\beta)$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $\beta(x)$ είναι σταθερή με τιμή $\beta \neq 0$ η αντιστρεψιμότητα του ℓ_β συνδέεται άμεσα με το φάσμα, που είναι μόνο σημειακό, [52], του τελεστή S με

$$Su := \operatorname{curl} u.$$

Πράγματι, για $u \in D(\ell_\beta) - \{0\}$ όπου $D(\ell_\beta) \subset L^2(\Omega)^3$, θεωρούμε την εξίσωση

$$\ell_\beta u = 0 \Leftrightarrow u + \beta \operatorname{curl} u = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{curl} u = -\frac{1}{\beta} u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\beta} \text{ ιδιοτιμή του } S \text{ και } u \text{ το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής αυτής.}$$

Επομένως, αν ο $-\frac{1}{\beta}$ δεν είναι ιδιοτιμή του τελεστή

$$Su = \operatorname{curl} u,$$

μοναδική λύση της $\operatorname{curl} u = -\frac{1}{\beta}u$ επομένως και της $\ell_\beta u = 0$ είναι η $u = 0$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την $\ker(\ell_\beta) = \{0\}$ που συνεπάγεται ότι ο ℓ_β είναι $1-1$ και άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση

$$\ell_\beta^{-1} : R(\ell_\beta) \mapsto D(\ell_\beta)$$

όπου $R(\ell_\beta)$ το πεδίο τιμών του ℓ_β .

Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\beta(x), x \in \bar{\Omega}$ είναι σταθερή με τιμή $\beta \neq 0$. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε πολυστρωματική διάταξη από οπτικώς ενεργά υλικά με διαφορετικό δείκτη διάθλασης ανά στρώμα, αλλά με παράμετρο χειρομορφίας που διαφέρει τόσο λίγο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί σταθερά. Αν η εναλλαγή των υλικών γίνεται σε διαστάσεις πολύ μικρότερες του μήκους κύματος, νομιμοποιείται κάποιος να θεωρήσει $\epsilon = \epsilon(x), \mu = \mu(x)$.

Οι τελεστές

$$\operatorname{curl} : H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)^3$$

$$\operatorname{curl} : H(\operatorname{curl}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)^3$$

έχουν φάσμα $\sigma(\operatorname{curl})$ το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών [29],[52] και επομένως $-\frac{1}{\beta} \in \mathbb{C}$ οπότε ο ℓ_β δεν έχει αντίστροφο στους χώρους $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ και $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ άρα και ο τελεστής

$$L_\beta = \begin{pmatrix} \ell_\beta & O_3 \\ O_3 & \ell_\beta \end{pmatrix}$$

με $D(L_\beta) = H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \times H(\operatorname{curl}; \Omega)$ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο.

Περιορίζοντας το πεδίο ορισμού του τελεστή curl από τον $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ και τον $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ στον

$$W_{\operatorname{curl}} := \{u \in W : \operatorname{curl} u \in W\} \quad \text{όπου} \quad (3.12)$$

$$W := H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega) \quad (3.13)$$

αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα [31], [52]:

Θεώρημα 3.1. *Για τον τελεστή*

$$S : W_{\operatorname{curl}} \mapsto W, \quad Su = \operatorname{curl} u$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

$$- S(W_{\operatorname{curl}}) = W$$

3.2. ΔΙΑΤΤΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- είναι κλειστός και αυτοσυζυγής
- είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του $S^{-1} : W \mapsto W_{\text{curl}}$ είναι συμπαγής
- το φάσμα του είναι μόνο σημειακό $\sigma_p(S)$ και $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, αν

$$-\frac{1}{\beta} \notin \sigma_p(S) \quad (3.14)$$

τότε ο ℓ_β περιοριζόμενος στον W_{curl} και ο L_β στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ έχουν φραγμένο αντίστροφο, δηλαδή οι τελεστές

$$\ell_\beta^{-1} : W \mapsto W_{\text{curl}} \quad \text{και} \quad L_\beta^{-1} : W \times W \mapsto W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$$

είναι φραγμένοι.

Επίσης, ο τελεστής Maxwell

$$M : W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \mapsto W \times W$$

αντιστρέφεται και ο αντίστροφος του $M^{-1} : W \times W \mapsto W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ είναι συμπαγής άρα και φραγμένος. Τέλος, ο τελεστής

$$M L_\beta^{-1} : W \times W \mapsto L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$$

έχει κλειστό πεδίο ορισμού $D(M L_\beta^{-1}) = W \times W$, κλειστό γράφημα και επομένως ως τελεστής μεταξύ δύο χώρων Banach θα είναι συνεχής δηλαδή φραγμένος.

Συνέπεια των ανωτέρω είναι η αναζήτηση λύσης $u = (E, H)^T$ του προβλήματος (3.11) στον πυκνό υπόχωρο $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ του διαχωρίσιμου χώρου Hilbert $W \times W$.

Από τον ορισμό του W_{curl} προκύπτει ότι κάθε συνιστώσα $v = E, H$ της λύσης u του (P) πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{στον } \Omega, \quad \hat{n} \cdot v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{και} \quad \hat{n} \cdot \operatorname{curl} v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.15)$$

όπου \hat{n} το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$ διάνυσμα. Τότε, από την ταυτότητα

$$\hat{n} \cdot \operatorname{curl} v = \operatorname{div}_\tau(\hat{n} \times v)$$

προκύπτει ότι $\operatorname{div}_\tau(\hat{n} \times v) = 0$, με div_τ συμβολίζουμε τον τελεστή της επιφανειακής απόκλισης. Επομένως, αναγκαία συνθήκη ύπαρξης λύσης του (P) στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ είναι

$$\operatorname{div}_\tau(\hat{n} \times E) = \operatorname{div}_\tau(\hat{n} \times H) = 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (3.16)$$

3.2.3 Καλή τοποθέτηση του προβλήματος (3.11)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (3.11) έχει ακριβώς μια ασθενή λύση, η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα σε κατάλληλη norm. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Faedo-Galerkin [8], [43], [45] επειδή αυτή ενδείκνυται για αριθμητικές μεθόδους επίλυσης για την ύπαρξη της λύσης και τη θεωρία ημιομάδων για τη συνεχή εξάρτηση της λύσης.

Θεώρημα 3.2. Έστω ότι οι συναρτήσεις ϵ, μ ικανοποιούν την (3.6), ο πίνακας A είναι συμμετρικός και ικανοποιεί την (3.10), $u^0 \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$, $\text{div}_\tau(\hat{\eta} \times E^0) = \text{div}_\tau(\hat{\eta} \times H^0) = 0$ και $J \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))$, $T > 0$. Τότε, το πρόβλημα (P) έχει μοναδική λύση

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)) \cap L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}})$$

που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; W \times W)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))} \leq c(\|J\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))} + \|u^0\|_{W \times W})$$

όπου c θετική σταθερά που εξαρτάται από $\|A\|_{L^\infty}$.

Απόδειξη. 1^ο Βήμα: Ύπαρξη προσεγγιστικής λύσης u_m (λύση Galerkin) του (P). Έστω e_n , $n = 1, 2, \dots$ μια ορθοκανονική βάση του χώρου $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$. Θεωρούμε τους m -διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους

$$V_m = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle, \quad m = 1, 2, \dots$$

για τους οποίους ισχύουν

$$V_m \subset V_{m+1} \quad \text{και} \quad \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}.$$

Αναζητούμε λύση u_m του (P) στον V_m της μορφής

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) e_k(x). \quad (3.17)$$

Οι $u_k = u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις του t , συντεταγμένες του u_m στη βάση e_n : $n = 1, 2, \dots, m$. Από την αρχική συνθήκη του προβλήματος (3.11), την (3.17) και την ορθοκανονικότητα της βάσης παίρνουμε

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) e_k(x) \quad \text{με} \quad u_k(0) = (u^0, e_k). \quad (3.18)$$

3.2. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Με ολοκλήρωση της (3.11) στο $[0, t]$ και αξιοποίηση της αρχικής συνθήκης του (3.11) προκύπτει

$$A L_\beta u(x) = \int_0^t M u(s) ds - \int_0^t J(s) ds + A L_\beta u^0. \quad (3.19)$$

Η u_m είναι λύση της (3.11) ή ισοδύναμα της (3.19) όταν

$$A L_\beta u_m(x) = \int_0^t M u_m(s) ds - \int_0^t J(s) ds + A L_\beta u^0. \quad (3.20)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.20) με το στοιχείο $e_i = e_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ και ολοκληρώνουμε στο Ω οπότε προκύπτει

$$(A L_\beta u_m, e_i) = \left(\int_0^t M u_m(s) ds, e_i \right) - \left(\int_0^t J(s) ds, e_i \right) + (A L_\beta u^0, e_i) \quad (3.21)$$

για $i = 1, 2, \dots, m$. Αντικαθιστώντας στην (3.21) το u_m από την (3.17) και αξιοποιώντας την γραμμικότητα των τελεστών L_β και M η (3.21) μετατρέπεται στην

$$L_\beta^i \cdot [u_m] = \int_0^t [r_i] \cdot [u_m(s)] ds - \int_0^t J_i(s) ds + L_\beta^i \cdot [u^0], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.22)$$

όπου

- $L_\beta^i = (L_\beta^{i1}, L_\beta^{i2}, \dots, L_\beta^{im})$ με $L_\beta^{ik} = (A L_\beta e_k, e_i) \in \mathbb{R}$ και $i = 1, 2, \dots, m$
- $[u_m] := (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ για κάθε $t \in [0, T]$
- $[r_i] := (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \in \mathbb{R}^m$ με $r_{ik} = (M e_k, e_i)$ για $i, k = 1, 2, \dots, m$
- $J_i := (J_i, e_i) \in \mathbb{R}$ με $i = 1, 2, \dots, m$
- $[u^0] := (u_1(0), u_2(0), \dots, u_m(0)) \in \mathbb{R}^m$ με $u_k(0)$ όπως στην (3.17).

Η σχέση (3.22) σε μορφή πινάκων γράφεται

$$LU = \int_0^t RU(s) ds + F(t) \quad (3.23)$$

όπου $L := (L_\beta^{ij})$ $m \times m$ είναι ο πίνακας με στοιχεία L_β^{ij} όπως ορίζονται παραπάνω. Όμοια και ο $R := (r_{ij})$ $m \times m$ είναι πίνακας με στοιχεία r_{ij} όπως τα ορίσαμε

παραπάνω. Το διάνυσμα $F(t) := -\int_0^t (j_1(s), j_2, \dots, j_m(s))^T ds + L[u^0] \in \mathbb{R}^m$ είναι γνωστό διάνυσμα και το $U := U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$ είναι το άγνωστο διάνυσμα. Η (3.23) είναι μια εξίσωση Volterra 2ου είδους και έχει μοναδική λύση σύμφωνα με το θεώρημα Fredholm, [28].

2^ο Βήμα: Εκτιμήσεις των u_m και $\frac{du_m}{dt}$

Εστώ ένα $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Πολλαπλασιάζουμε την (3.20) με $L_\beta e_i$, ολοκληρώνουμε στο Ω και παίρνουμε

$$(AL_\beta u_m, L_\beta e_i) = \left(\int_0^t M u_m(s) ds, L_\beta e_i \right) - \left(\int_0^t J(s) ds, L_\beta e_i \right) + (AL_\beta u^0, L_\beta e_i)$$

από την οποία με παραγωγή ως προς t , λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα $L_\beta e_i$ και ο όρος $(AL_\beta u^0, L_\beta e_i)$ είναι ανεξάρτητοι του t προκύπτει

$$\left(\frac{d}{dt} AL_\beta u_m, L_\beta e_i \right) = (M u_m, L_\beta e_i) - (J(t), L_\beta e_i). \quad (3.24)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.24) με τις ανεξάρτητες του x , συντεταγμένες $u_i = u_i(t)$ του u_m και αθροίζουμε ως προς i , οπότε λαμβάνοντας υπόψη την (3.17) παίρνουμε

$$\left(\frac{d}{dt} AL_\beta u_m, L_\beta u_m \right) = (M u_m, L_\beta u_m) - (J(t), L_\beta u_m). \quad (3.25)$$

Από τη συμμετρικότητα του A προκύπτει

$$\frac{d}{dt} (AL_\beta u_m, L_\beta u_m) = 2 \left(\frac{d}{dt} AL_\beta u_m, L_\beta u_m \right). \quad (3.26)$$

Η (3.25) με αξιοποίηση της (3.26) μετατρέπεται στην

$$\frac{d}{dt} (AL_\beta u_m, L_\beta u_m) = 2 (M u_m, L_\beta u_m) - 2 (J(t), L_\beta u_m)$$

η οποία με ολοκλήρωση στο $[0, t]$ γίνεται

$$(AL_\beta u_m, L_\beta u_m) = 2 \int_0^t (M u_m, L_\beta u_m) ds - 2 \int_0^t (J, L_\beta u_m) ds + (AL_\beta u_m(0), L_\beta u_m(0)). \quad (3.27)$$

Επειδή, ο L_β είναι αντιστρέψιμος στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ με φραγμένο αντίστροφο, θέτουμε

$$L_\beta u_m = w_m \Leftrightarrow u_m = L_\beta^{-1} w_m \quad \text{με } w_m \in W \times W. \quad (3.28)$$

Η (3.27) με τη βοήθεια της (3.28) γίνεται

$$(A w_m, w_m) = 2 \int_0^t (M L_\beta^{-1} w_m, w_m) ds - 2 \int_0^t (J, w_m) ds + (A w_m(0), w_m(0)). \quad (3.29)$$

Έχουμε

3.2. ΔΙΑΤΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- $(Aw_m, w_m) \geq \gamma \|w_m\|^2$ σύμφωνα με την (3.10)
- $\int_0^t (M L_\beta^{-1} w_m, w_m) ds \leq \int_0^t |(M L_\beta^{-1} w_m, w_m)| dy \leq \int_0^t \|M L_\beta^{-1} w_m\|_{L^2} \|w_m\|_{L^2} ds \leq \int_0^t k \|w_m\|_{L^2} \|w_m\|_{L^2} ds \leq k \int_0^t v_m^2 ds$ όπου $v_m(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|w_m(\tau)\|$
- $-\int_0^t (J, w_m) ds \leq \int_0^t |(J, w_m)| ds \leq \int_0^t \|J\|_{L^2} \|w_m\|_{L^2} ds \leq v_m(t) \int_0^t \|J(s)\|_{L^2} ds = v_m(t) \|J\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))}$
- $(Aw_m(0), w_m(0)) \leq \|Aw_m(0)\|_{L^2} \|w_m(0)\|_{L^2} \leq \|A\|_\infty \|u^0\|_{L^2(\Omega)^6}^2$ όπου $u^0 = w_m(0)$.

Αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις από την (3.29) προκύπτει

$$\gamma \|w_m\|_{L^2}^2 \leq 2k \int_0^t v_m^2(s) ds + 2v_m(t) \|J\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))} + \|A\|_\infty \|u^0\|_{L^2}^2 \quad \text{για κάθε } t > 0$$

οπότε ισχύει και η

$$\gamma v_m^2(t) \leq 2k \int_0^t v_m^2(s) ds + 2v_m(t) \|J\|_{L^1(0,T,L^2)} + \|A\|_\infty \|u^0\|_{L^2}^2,$$

η οποία με εφαρμογή της ανισότητας

$$2v_m(t) \|J\|_{L^1(0,T,L^2)} \leq \delta v_m^2(t) + \frac{1}{\delta} \|J\|_{L^1(0,T,L^2)}^2, \quad \delta > 0$$

και παίρνοντας στη συνέχεια $\delta = \frac{\gamma}{2}$ προκύπτει

$$v_m^2(t) \leq \frac{4k}{\gamma} \int_0^t v_m^2(s) ds + \frac{4}{\gamma^2} \|J\|_{L^1(0,T,L^2)}^2 + \frac{2}{\gamma} \|A\|_\infty \|u^0\|_{L^2}^2$$

που είναι της μορφής

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t \phi(s)g(s) ds \quad (3.30)$$

όπου $\phi(t) = v_m^2(t)$, $a = \frac{4}{\gamma^2} \|J\|_{L^1(0,T,L^2)}^2 + \frac{2}{\gamma} \|A\|_\infty \|u^0\|_{L^2}^2$ και $g(s) = \frac{4k}{\gamma}$.

Από την (3.30) με εφαρμογή της ανισότητας Gronwall προκύπτει

$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \frac{4k}{\gamma} ds\right) \leq a \exp\left(\int_0^T \frac{4k}{\gamma} ds\right) = ac$$

με $c > 0$ για κάθε $t \in [0, T]$, οπότε

$$\begin{aligned} v_m^2(t) &\leq ca = c\left\{\frac{4}{\gamma^2}\|J\|_{L^1(0,T,L^2)}^2 + \frac{2}{\gamma}\|A\|_{\infty}\|u^0\|_{L^2}^2\right\} \\ &\leq c \max\left\{\frac{4}{\gamma^2}, \frac{2}{\gamma}\|A\|_{\infty}\right\} \left(\|J\|_{L^1(0,T,L^2)}^2 + \|u^0\|_{L^2}^2\right) \leq c_1(\|J\|_{L^2}^2 + \|u^0\|_{L^2}^2) \\ &\leq c_1(\|J\|_{L^1(0,T,L^2)} + \|u^0\|_{L^2})^2 \end{aligned}$$

όπου c_1 σταθερά και επομένως

$$\|w_m\|_{L^\infty(0,T,W \times W)} \leq c_2(\|J\|_{L^1(0,T,L^2)} + \|u^0\|_{L^2}). \quad (3.31)$$

Αλλά

$$w_m = L_\beta u_m \Leftrightarrow u_m = L_\beta^{-1} w_m$$

και από το φραγμένο του L_β^{-1} στον $W \times W$ παίρνουμε

$$\|u_m\| = \|L_\beta^{-1} w_m\| \leq \|L_\beta^{-1}\| \|w_m\|$$

οπότε από την (3.31) προκύπτει

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,W \times W)} \leq c(\|J\|_{L^1(0,T,L^2)} + \|u^0\|_{L^2}). \quad (3.32)$$

3^ο Βήμα: Ύπαρξη λύσης του προβλήματος (P)

Στο προηγούμενο βήμα είδαμε πως η $w_m \in W \times W$, η οποία ορίζεται με την (3.28), είναι φραγμένη στον $W \times W$ για $t > 0$ οπότε από το θεώρημα Eberlein-Smuljan, [6], [14], υπάρχει υπακολουθία w_{k_m} τέτοια ώστε

$$w_{k_m} \rightharpoonup w \text{ και } \frac{dw_{k_m}}{dt} \rightharpoonup \frac{dw}{dt} \text{ στον } W \times W.$$

Θεωρούμε την ακολουθία

$$u_{k_m} = L_\beta^{-1} w_{k_m} \quad (3.33)$$

η οποία είναι φραγμένη στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ για $t > 0$. Επειδή η w_{k_m} είναι φραγμένη και ο L_β^{-1} είναι φραγμένος υπάρχει υπακολουθία $u_{l_{k_m}}$ και $u \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ τέτοια ώστε

$$u_{l_{k_m}} \rightharpoonup u \text{ στον } W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}. \quad (3.34)$$

Θεωρούμε τώρα την $w_{l_{k_m}} = L_\beta u_{l_{k_m}}$ η οποία ως υπακολουθία της w_{k_m} θα έχει το ίδιο (ασθενές) όριο με αυτή δηλαδή

$$w_{l_{k_m}} \rightharpoonup w \text{ στον } W \times W$$

οπότε

$$L_\beta u_{l_{k_m}} \rightharpoonup w \text{ στον } W \times W. \quad (3.35)$$

Από τις (3.34), (3.35) και τον ορισμό του L_β προκύπτει ότι

$$\beta \operatorname{curl} u_{l_{km}} \rightharpoonup w - u \text{ στον } W \times W. \quad (3.36)$$

Από τις (3.34), (3.36), τις συμπαγείς εμφυτεύσεις των $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}, W \times W$ στον $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$ και την κλειστότητα του curl έχουμε $w - u = \beta \operatorname{curl} u$, $u \in W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$ ισοδύναμα

$$L_\beta u = w. \quad (3.37)$$

Επειδή η u_m ικανοποιεί τη (3.11) έχουμε

$$\frac{d}{dt} (A L_\beta u_{l_{km}}) = M u_{l_{km}} - J \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}^*$$

από την οποία προκύπτει

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} A L_\beta u_{l_{km}} \cdot e_i \, dx = \int_{\Omega} M u_{l_{km}} \cdot e_i \, dx - \int_{\Omega} J \cdot e_i \, dx. \quad (3.38)$$

Αλλά ο τελεστής Maxwell M ικανοποιεί [31], [17] την

$$M^* = -M \text{ στον } D(M) \quad (3.39)$$

οπότε η (3.38) γίνεται

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A L_\beta u_{l_{km}} \cdot e_i \, dx = - \int_{\Omega} u_{l_{km}} \cdot M e_i \, dx - \int_{\Omega} J \cdot e_i \, dx$$

από την οποία, εξαιτίας των (3.34), (3.35) παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} (A w, e_i) = -(u, M e_i) - (J, e_i)$$

η οποία με τη βοήθεια των (3.37), (3.39) γράφεται

$$\frac{d}{dt} (A L_\beta u, e_i) = (M u, e_i) - (J, e_i)$$

οπότε από την πυκνότητα του V_m στον $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$ έχουμε

$$\frac{d}{dt} (A L_\beta u, v) = (M u, v) - (J, v) \text{ για κάθε } v \in W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$$

από την οποία πάλι με επιχειρήματα πυκνότητας συμπεραίνουμε ότι ισχύει για κάθε $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)$ και για κάθε $t > 0$ δηλαδή η u είναι μια λύση στον $W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)) \cap L^\infty(0, T, W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}})$.

3.2.4 Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα

Στο βήμα αυτό θα ολοκληρώσουμε τη δικαιολόγηση της καλής τοποθέτησης του προβλήματος (3.11) αξιοποιώντας τη θεωρία των ημιομάδων τελεστών. Εδώ υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\epsilon(x)$ και $\mu(x)$ είναι σταθερές στο $\bar{\Omega}$ με τιμές $\epsilon > 0$ και $\mu > 0$ αντίστοιχα. Αρχικά, γράφουμε το πρόβλημα (3.11) στη μορφή

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(L_\beta u(t)) = \mathcal{M}u(t) - F(t), & t \in [0, T] \\ u(0) = u^0 \end{cases} \quad (3.40)$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{M} = A^{-1}M$, $F(t) = A^{-1}J$ και $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}I_3 & O_3 \\ O_3 & \frac{1}{\mu}I_3 \end{pmatrix}$. Ο \mathcal{M} , επειδή τα στοιχεία του A^{-1} είναι, μη αρνητικές, σταθερές διατηρεί όλες τις ιδιότητες του τυπικού τελεστή Maxwell M . Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.2, ως πεδίο ορισμού του τελεστή L_β θεωρούμε τον υπόχωρο $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ ο οποίος είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H} := W \times W$. Ο \mathcal{H} είναι χώρος Hilbert και ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} (\epsilon u_1 v_1 + \mu u_2 v_2) dx \quad (3.41)$$

με επαγόμενη norm την

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega} \epsilon u^2 dx + \int_{\Omega} \mu v^2 dx \quad (3.42)$$

η οποία και στην περίπτωση που $\epsilon = \epsilon(x)$ και $\mu = \mu(x)$, όπου οι ϵ και μ ικανοποιούν τις (6), είναι ισοδύναμη με τη συνήθη, χωρίς βάρη, L^2 norm. Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$w(t) = L_\beta u(t) \iff u(t) = L_\beta^{-1} w(t) \quad (3.43)$$

με τη βοήθεια του οποίου το πρόβλημα (3.40) γράφεται

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) = \mathcal{M}L_\beta^{-1} w(t) - F(t), & t \in [0, T] \\ w(0) = L_\beta u^0 := w^0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Ο τελεστής $\mathcal{M}L_\beta^{-1}$ σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.1 για τον ML^{-1} είναι, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον χώρο Hilbert $\mathcal{H} = W \times W$, επομένως [39] είναι απειροστός γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας τελεστών $T(t) := \exp(t\mathcal{M}L_\beta^{-1})$, $t > 0$ με τη βοήθεια της

οποίας η λεγόμενη «ήπια» λύση του προβλήματος (3.44) δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} w(t) &= T(t)w^0 + \int_0^t T(t-s)F(s) ds, \quad t \in [0, T] \\ &= T(t) L_\beta u^0 + \int_0^t (t-s)F(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Από την τελευταία ισότητα με αξιοποίηση του μετασχηματισμού (3.43) παίρνουμε

$$u(t) = L_\beta^{-1} T(t) L_\beta u^0 + L_\beta^{-1} \left[\int_0^t T(t-s)F(s) ds \right], \quad t \in [0, T]$$

η οποία, επειδή ο L_β^{-1} είναι φραγμένος γίνεται

$$u(t) = L_\beta^{-1} T(t) L_\beta u^0 + \int_0^t L_\beta^{-1} T(t-s)F(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.46)$$

Από τα παραπάνω σύμφωνα με το [39], υποθέτοντας ότι $F \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ και $L_\beta u^0 \in \mathcal{H}$ έχουμε το επόμενο

Θεώρημα 3.3. *Το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.40) έχει μια μοναδική ήπια λύση που δίνεται από τον τύπο (3.45).*

Για να προχωρήσουμε θα δώσουμε πρώτα τους επόμενους ορισμούς.

Ορισμός 3.4. *Μια συνάρτηση $w : [0, T] \mapsto \mathcal{H}$ λέγεται ισχυρή λύση του προβλήματος (3.44), όταν ισχύουν:*

1. $w(t) \in D(\mathcal{M}L_\beta^{-1}) \subset \mathcal{H}$, σχεδόν παντού στο διάστημα $[0, T]$
2. $\int_0^T \|\mathcal{M}L_\beta^{-1} w(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty$ και
3. η $w(t)$ επαληθεύει τις εξισώσεις (3.44) για κάθε $t \in [0, T]$.

Ορισμός 3.5. *Μια συνάρτηση $w : [0, T] \mapsto \mathcal{H}$ λέγεται κλασική λύση του προβλήματος (3.44), όταν ισχύουν:*

1. $w(t) \in D(\mathcal{M}L_\beta^{-1})\mathcal{H}$, για κάθε $t \in [0, T]$
2. η συνάρτηση $(\mathcal{M}L_\beta^{-1} w)(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t \in [0, T]$
3. η $w(t)$ επαληθεύει τις εξισώσεις (3.44), για κάθε $t \in [0, T]$.

Αποδεικνύεται [31], [39] το επόμενο:

Θεώρημα 3.6. *Η ήπια λύση του προβλήματος (3.40), που δίνεται από την σχέση (3.46) είναι και ισχυρή λύση.*

Με επιπλέον ομαλότητα για τον όρο πηγής F αποδεικνύεται [39] ότι η (3.46) είναι τελικά κλασική λύση. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το θεώρημα:

Θεώρημα 3.7. *Αν $F \in C([0, T], \mathcal{H})$, ισοδύναμα $J \in C([0, T], \mathcal{H})$ τότε η ισχυρή λύση του προβλήματος (3.40), που δίνεται από την (3.46) είναι και κλασική λύση.*

Παρατήρηση: Ο πρώτος όρος του β' μέλους της (3.46), που δίνει την κλασική λύση του προβλήματος (3.40), περιέχει την αρχική τιμή u^0 της λύσης $u(t)$, πάνω στην οποία δρά ο τελεστής L_β ο οποίος δεν είναι συνεχής. Αυτό έχει ως συνέπεια ο τύπος αυτός της λύσης $u(t)$ να μην εξασφαλίζει τη συνεχή εξάρτηση της από τα αρχικά δεδομένα.

Οι προτάσεις που ακολουθούν θα μας επιτρέψουν την τροποποίηση του τύπου (3.46) ώστε να εξασφαλίζεται και η συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα.

Πρόταση 3.8. *Για τους αντιστρέψιμους τελεστές*

$$\mathcal{M} : W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \mapsto W \times W \quad \mu \in \mathcal{M} = \begin{pmatrix} O_3 & \frac{1}{\epsilon} \text{curl} \\ -\frac{1}{\mu} \text{curl} & O_3 \end{pmatrix}$$

$$L_\beta : W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \mapsto W \times W \quad \mu \in L_\beta = \begin{pmatrix} \ell_\beta & O_3 \\ O_3 & \ell_\beta \end{pmatrix} \quad \text{όπου } \ell_\beta = I + \beta \text{curl}$$

ισχύει

$$\mathcal{M}L_\beta^{-1} = L_\beta^{-1}\mathcal{M}$$

στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$.

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} D(\mathcal{M}L_\beta^{-1}) &= \{u \in D(L_\beta^{-1}) : L_\beta^{-1}u \in D(\mathcal{M})\} = \{u \in W \times W : L_\beta^{-1}u \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}\} \\ &= W \times W \quad (\text{ορισμός } L_\beta^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(L_\beta^{-1}\mathcal{M}) &= \{u \in D(\mathcal{M}) : \mathcal{M}u \in D(L_\beta^{-1})\} = \{u \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} : \mathcal{M}u \in W \times W\} \\ &= W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \quad (\text{ορισμός } \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$D(\mathcal{M}L_\beta^{-1}) \cap D(L_\beta^{-1}\mathcal{M}) = W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \quad \text{γιατί } W_{\text{curl}} \subseteq W.$$

Επίσης,

$$\mathcal{M}L_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} O_3 & \frac{1}{\epsilon} \text{curl} \\ -\frac{1}{\mu} \text{curl} & O_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\beta^{-1} & O_3 \\ O_3 & \ell_\beta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_3 & \frac{1}{\epsilon} \text{curl } \ell_\beta^{-1} \\ -\frac{1}{\mu} \text{curl } \ell_\beta^{-1} & O_3 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

και

$$L_\beta^{-1} \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \ell_\beta^{-1} & O_3 \\ O_3 & \ell_\beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_3 & \frac{1}{\epsilon} \text{curl} \\ -\frac{1}{\mu} \text{curl} & O_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_3 & \frac{1}{\epsilon} \ell_\beta^{-1} \text{curl} \\ -\frac{1}{\mu} \ell_\beta^{-1} \text{curl} & O_3 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Από την $\ell_\beta = I + \beta \text{curl}$ προκύπτει $\text{curl} = \frac{1}{\beta}(\ell_\beta - I)$ οπότε

- $\text{curl} \ell_\beta^{-1} = \frac{1}{\beta}(\ell_\beta - I) \ell_\beta^{-1} = \frac{1}{\beta}(\ell_\beta \ell_\beta^{-1} - \ell_\beta^{-1}) = \frac{1}{\beta}(I_W - \ell_\beta^{-1})$
- $\ell_\beta^{-1} \text{curl} = \ell_\beta^{-1} \frac{1}{\beta}(\ell_\beta - I) = \frac{1}{\beta}(\ell_\beta^{-1} \ell_\beta - \ell_\beta^{-1}) = \frac{1}{\beta}(I_{W_{\text{curl}}} - \ell_\beta^{-1})$

Στον W_{curl} που περιέχεται στον W προφανώς $I_W = I_{W_{\text{curl}}}$ οπότε από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει $\text{curl} \ell_\beta^{-1} = \ell_\beta^{-1} \text{curl}$ στον W_{curl} και από τις σχέσεις (3.47), (3.48) παίρνουμε

$$\mathcal{M} L_\beta^{-1} = L_\beta^{-1} \mathcal{M}$$

στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$. □

Πρόταση 3.9. Για τους τελεστές \mathcal{M} και L_β όπως στην παραπάνω πρόταση ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$:

1. $\mathcal{M}^n L_\beta^{-1} = L_\beta^{-1} \mathcal{M}^n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$
2. $(\mathcal{M} L_\beta^{-1})^n = \mathcal{M}^n L_\beta^{-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$
3. $L_\beta^{-1} T(t) L_\beta = T(t)$ όπου $T(t) = e^{t \mathcal{M} L_\beta^{-1}}$ η ημιομάδα των φραγμένων γραμμικών τελεστών, που παράγεται από τον φραγμένο τελεστή $\mathcal{M} L_\beta^{-1}$.

Απόδειξη. ι) Επαγωγικά

ii) Επαγωγικά

iii) Επειδή ο $\mathcal{M} L_\beta^{-1}$ είναι φραγμένος $T(t) = \exp^{t \mathcal{M} L_\beta^{-1}}, t \geq 0$

$$\exp^{t \mathcal{M} L_\beta^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t \mathcal{M} L_\beta^{-1})^n}{n!}$$

και ο L_β^{-1} είναι φραγμένος έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} L_\beta^{-1} T(t) L_\beta &= L_\beta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\mathcal{M} L_\beta^{-1})^n}{n!} L_\beta \stackrel{ii)}{=} L_\beta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathcal{M}^n L_\beta^{-n}}{n!} L_\beta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{L_\beta^{-1} \mathcal{M}^n L_\beta^{-n}}{n!} L_\beta \stackrel{i)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\mathcal{M}^n L_\beta^{-1} L_\beta^{-n}}{n!} L_\beta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{M}^n L_\beta^{-n} \stackrel{ii)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\mathcal{M} L_\beta^{-1})^n}{n!} \\ &= T(t). \end{aligned}$$

□

Με τη βοήθεια του iii) της παραπάνω πρότασης ο τύπος (3.46) παίρνει τη μορφή

$$u(t) = T(t)u^0 + \int_0^t L_\beta^{-1} T(t-s)F(s) ds \quad (3.49)$$

$$= T(t)u^0 - \int_0^t L_\beta^{-1} T(t-s)J(s) ds, t \in [0, T.] \quad (3.50)$$

Επειδή ο $T(t)$ είναι για κάθε $t \geq 0$ συνεχής από την (3.49) ή την (3.50) είναι φανερό πλέον η συνεχής εξάρτηση της λύσης $u(t)$ από τα αρχικά δεδομένα.

Από το παραπάνω συμπεράσμα, το θεώρημα 3 της 2.3 και το θεώρημα 8 της παρούσας παραγράφου συμπεραίνουμε την αλήθεια του επόμενου βασικού θεωρήματος

Θεώρημα 3.10. *Αν $u^0 \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ και $J \in C([0, T], \mathcal{H})$ τότε το πρόβλημα (3.40) και ισοδύναμα το (3.11) είναι κλασικά καλώς τοποθετημένο στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$. Η μοναδική λύση δίνεται από τον τύπο*

$$u(t) = T(t)u^0 - \int_0^t L_\beta^{-1} T(t-s)J(s) ds, t \in [0, T]$$

όπου $T(t), t \geq 0$ η ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα τελεστών στον $W \times W$ που παράγεται από τον φραγμένο τελεστή $M L_\beta^{-1}$.

□

3.2.5 Ένας νόμος διατήρησης

Θεώρημα 3.11. *Αν u η λύση του προβλήματος (P), τότε ισχύει*

$$(A L_\beta u, u) + 2 \int_0^t (J, u) ds + 2 \int_0^t (Mu, u) ds = (A L_\beta u^0, u^0), \text{ για κάθε } t > 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $d(x, t) = A L_\beta u(x, t)$, $u = (E, H)^T$ οπότε η (3.11) γράφεται

$$\dot{d} = Mu - J, \text{ όπου } \dot{d} = \frac{\partial}{\partial t} d. \quad (3.51)$$

Ορίζουμε το πεδίο

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2} d(x, t) \cdot u(x, t), \quad x \in \Omega, t \geq 0$$

τότε από τον ορισμό του d και την (3.51) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \dot{d} \cdot u + \frac{1}{2} d \cdot \dot{u} \\ &= \frac{1}{2} (Mu) \cdot u - \frac{1}{2} J \cdot u + \frac{1}{2} (Au) \cdot \dot{u} + \frac{1}{2} \beta (ANu) \cdot \dot{u} \end{aligned}$$

όπου $N := \begin{pmatrix} \text{curl} & O_3 \\ O_3 & \text{curl} \end{pmatrix}$, από την οποία προκύπτει

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Mu) \cdot u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} J \cdot u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Au) \cdot \dot{u} dx + \frac{1}{2} \beta \int_{\Omega} (ANu) \cdot \dot{u} dx. \quad (3.52)$$

Από τις $A^T = A$ και $(AN)^T = AN$ βρίσκουμε

$$(Au, \dot{u}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Au, u) \text{ και } (ANu, \dot{u}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (ANu, u). \quad (3.53)$$

Με αντικατάσταση της (3.53) στην (3.52) βρίσκουμε

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx = \frac{1}{2} (Mu, u) - \frac{1}{2} (J, u) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} [(Au, u) + \beta (ANu, u)].$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας ισότητας στο $[0, t]$ συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, t) dx - \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, 0) dx &= \frac{1}{2} \int_0^t (Mu, u) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (J, u) ds + \frac{1}{4} [(Au, u) + \beta (ANu, u)] \\ &\quad - \frac{1}{4} [(Au(0), u(0)) + \beta (ANu(0), u(0))]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Από τον ορισμό των πεδίων d και \mathcal{E} βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, 0) dx &= \frac{1}{2} [(Au(0), u(0)) + \beta (ANu(0), u(0))], \\ \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, t) dx &= \frac{1}{2} [(Au, u) + \beta (ANu, u)] \end{aligned}$$

με αντικατάσταση των οποίων στην (3.54) προκύπτει

$$(Au, u) + \beta (ANu, u) = -2 \int_0^t (J, u) ds + (Au(0), u(0)) + \beta (ANu(0), u(0))$$

η οποία θέτοντας $u(x, 0) = (E(x, 0), H(x, 0))^T = u^0(x)$ και αξιοποιώντας τον ορισμό του L_{β} γράφεται

$$(AL_{\beta} u, u) = 2 \int_0^t (Mu, u) ds - 2 \int_0^t (J, u) ds + (AL_{\beta} u^0, u^0).$$

που αν τη γράψουμε στη μορφή

$$(AL_{\beta} u, u) - 2 \int_0^t (Mu, u) ds + 2 \int_0^t (J, u) ds = (AL_{\beta} u^0, u^0) \quad (3.55)$$

το δεύτερο μέλος είναι ανεξάρτητο του $t > 0$ και εκφράζει επομένως ένα νόμο διατήρησης. \square

Σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που η εφαπτομενική συνιστώσα του E ή του H μηδενίζεται δηλαδή όταν $\hat{n} \times E = 0$ στο $\partial\Omega$ (ή $\hat{n} \times H = 0$) από την ταυτότητα $\operatorname{div}(E \times H) = H \operatorname{curl} E - E \operatorname{curl} H$ και το θεώρημα απόκλισης του Gauss προκύπτει ότι

$$(Mu, u) = 0 \quad (3.56)$$

οπότε η (3.55) παίρνει τη μορφή

$$(AL_\beta u, u) + 2 \int_0^t (J, u) ds = (AL_\beta u^0, u^0) \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (3.57)$$

3.3 Ομοιογενοποίηση

3.3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε πλέον ότι το φραγμένο χωρίο Ω του \mathbb{R}^3 καλύπτεται από υλικό του οποίου η περιοδική δομή προκύπτει από περιοδική χωρική επανάληψη μιας «στοιχειώδους» μικροδομής μεγέθους $\varepsilon > 0$.

Για τον πίνακα $A^\varepsilon = A^\varepsilon(x)$ υποθέτουμε ότι ανήκει στον χώρο $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36})$ και τα αρχικά δεδομένα $u^{\varepsilon,0}$ και J^ε ανήκουν στους χώρους $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$ και $W^{1,1}(0, T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))$ αντίστοιχα. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα (3.2) της παραγράφου (3.2.3), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια οικογένεια ηλεκτρομαγνητικών πεδίων $u(x, t) = (E^\varepsilon(x, t), H^\varepsilon(x, t))^T$, $x \in \Omega$, $t > 0$ λύσεων του εξελικτικού προβλήματος

$$(P_h) \begin{cases} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon) = Mu^\varepsilon - J^\varepsilon, & x \in \Omega, t \in (0, T), T > 0 \\ u^\varepsilon(x, 0) = u^{\varepsilon,0}(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.58)$$

στον χώρο $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$.

Το πρόβλημα της ομοιογενοποίησης συνίσταται στη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς, ως προς μια κατάλληλη τοπολογία, της λύσης $u^\varepsilon(x, t)$ του (P_h) όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ καθώς και η εύρεση της μ.δ.ε που ικανοποιεί το όριο της u^ε . Γί αυτό χρειαζόμαστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των αρχικών δεδομένων και της πηγής, αφού αυτά εξαρτώνται από το ε . Υποθέτουμε τις επόμενες ισχυρές συγκλίσεις:

Υπόθεση 1:

- $u^{\varepsilon,0} \rightarrow u^0$ στον $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$
- $J^\varepsilon \rightarrow J$ στον $W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))$.

Επίσης, υποθέτουμε ότι η μικροδομή είναι κυβικής μορφής και συμβολίζουμε με $Y = [0, 1]^3$ το βασικό κελί αναφοράς. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε την μονοσήμαντη ανάλυση

$$x = \varepsilon\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) \quad (3.59)$$

όπου $[\frac{x}{\varepsilon}] \in \mathbb{Z}^3$ και $\{\frac{x}{\varepsilon}\} \in Y$.

Για λόγους συμβατότητας των καταστατικών παραμέτρων A^ε με την περιodicότητα του υλικού, που καλύπτει το Ω , υποθέτουμε ότι ο πίνακας A^ε είναι εY -περιοδικός.

Υπόθεση 2:

$$A^\varepsilon(x) = A(\{\frac{x}{\varepsilon}\}), x \in \Omega, \varepsilon > 0. \quad (3.60)$$

3.3.2 Ασθενής - Ισχυρή σύγκλιση της λύσης του (P_h)

Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα (3.2) της παραγράφου (3.2.3) κάτω από τις αρχικές υποθέσεις για A^ε και J^ε το πρόβλημα (P_h) έχει μοναδική λύση $u^\varepsilon(x, t)$ που ανήκει στον $W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ για κάθε $t \in (0, T), T > 0$ και είναι φραγμένη. Επίσης, (3.31) έχουμε ότι και το πεδίο $w_\varepsilon = L_\beta u^\varepsilon$ είναι φραγμένο στον $W \times W$, για κάθε $t \in (0, T), T > 0$. Αποδεικνύουμε το επόμενο, χρήσιμο για όσα ακολουθούν θεώρημα, που δίνει μια σχέση ανάλογη της (3.55).

Θεώρημα 3.12. *Αν u^ε είναι η λύση του προβλήματος (P_h) με τα πεδία $u^{\varepsilon,0}, J^\varepsilon$ και A^ε να ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις τότε ισχύει*

$$(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) - 2 \int_0^t (M u^\varepsilon, u^\varepsilon) ds + 2 \int_0^t (J^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) ds = (A^\varepsilon L_\beta u^{\varepsilon,0}, L_\beta u^{\varepsilon,0}) \quad (3.61)$$

όπου το (\cdot, \cdot) συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο $(f, g) = \int_\Omega f \cdot g dx$.

Απόδειξη. Επειδή η u^ε είναι λύση του (P_h) θα ισχύει

$$\frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon) = M u^\varepsilon - J^\varepsilon$$

από την οποία πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $L_\beta u^\varepsilon \in W \times W$ και ολοκληρώνοντας την προκύπτουσα στο Ω βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) = (M u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) - (J^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon). \quad (3.62)$$

Αξιοποιώντας τη συμμετρία του A , που υποθέτουμε με την (3.10) συμπεραίνουμε και τη συμμετρία του A^ε και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) &= \left(\frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon), L_\beta u^\varepsilon\right) + (A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, \frac{d}{dt}(L_\beta u^\varepsilon)) \\ &= 2\left(\frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon), L_\beta u^\varepsilon\right) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left(\frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon), L_\beta u^\varepsilon \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon). \quad (3.63)$$

Η (3.62) με τη βοήθεια της (3.63) γίνεται

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) = (Mu^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) - (J^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon). \quad (3.64)$$

Όμως,

$$(Mu^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) = (Mu^\varepsilon, u^\varepsilon + \beta Nu^\varepsilon) = (Mu^\varepsilon, u^\varepsilon) + \beta(Mu^\varepsilon, Nu^\varepsilon).$$

Από τους ορισμούς των M, N προκύπτει άμεσα ότι

$$(Mu^\varepsilon, Nu^\varepsilon) = 0. \quad (3.65)$$

Πράγματι,

$$(Mu^\varepsilon, Nu^\varepsilon) = \int_{\Omega} (\operatorname{curl} H^\varepsilon \cdot \operatorname{curl} E^\varepsilon - \operatorname{curl} E^\varepsilon \cdot \operatorname{curl} H^\varepsilon) dx = 0.$$

Με αξιοποίηση αυτού η (3.64) γίνεται

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon L_\beta u^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon) = (Mu^\varepsilon, u^\varepsilon) - (J^\varepsilon, L_\beta u^\varepsilon)$$

από την οποία με ολοκλήρωση ως προς t στο $[0, t]$ και χρήση της αρχικής συνθήκης του (P_h) προκύπτει η ζητούμενη σχέση. \square

Παρατήρηση: Θέτουμε

$$w^\varepsilon := L_\beta u^\varepsilon \text{ και } w^{\varepsilon,0} := L_\beta u^{\varepsilon,0} \quad (3.66)$$

όπου $w^\varepsilon \in W \times W$ και $w^{\varepsilon,0} \in W \times W$. Επειδή ο L_β είναι αντιστρέψιμος στον $W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}}$ όπου ανήκει το u^ε και το $u^{\varepsilon,0}$ έχουμε

$$u^\varepsilon = L_\beta^{-1} w^\varepsilon \text{ και } u^{\varepsilon,0} = L_\beta^{-1} w^{\varepsilon,0}. \quad (3.67)$$

Με τη βοήθεια των (3.66) και (3.67) η (3.61) παίρνει τη μορφή

$$(A^\varepsilon w^\varepsilon, w^\varepsilon) - 2 \int_0^t (Kw^\varepsilon, \Lambda w^\varepsilon) ds + 2 \int_0^t (J^\varepsilon, w^\varepsilon) ds = (A^\varepsilon w^{\varepsilon,0}, w^{\varepsilon,0}) \quad (3.68)$$

όπου οι τελεστές

$$K := M L_\beta^{-1} : W \times W \rightarrow W \times W \text{ και } \Lambda := L_\beta^{-1} : W \times W \rightarrow W_{\operatorname{curl}} \times W_{\operatorname{curl}} \quad (3.69)$$

σύμφωνα με το θεώρημα 1 της 2.2 και τις συνέπειες του είναι φραγμένοι. Με κίνητρο τις ιδότητες των τελεστών K και Λ και την (3.67) μετασχηματίζουμε το πρόβλημα (P_h) στο (Q_h)

$$(Q_h) \begin{cases} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon w^\varepsilon) &= K w^\varepsilon - J^\varepsilon, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), T > 0 \\ w^\varepsilon(x, 0) &= w^{\varepsilon,0}(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (3.70)$$

με τις υποθέσεις

$$w^{\varepsilon,0} \rightarrow w^0 \text{ στον } W \times W \quad (3.71)$$

$$J^\varepsilon \rightarrow J \text{ στον } W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)) \quad (3.72)$$

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right). \quad (3.73)$$

Διατυπώνουμε τώρα το κύριο θεώρημα του κεφαλαίου 3.

Θεώρημα 3.13. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ η αρχική τιμή $w^{\varepsilon,0}$ της λύσης, ο όρος πηγής J^ε και ο πίνακας A^ε ικανοποιούν τις (3.71), (3.72) και (3.73) αντίστοιχα. Έστω w^ε η λύση του προβλήματος (3.70). Τότε υπάρχει μια τριάδα πεδίων (w, \bar{w}, \hat{w}) με

$$\begin{aligned} w &\in L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}) \cap W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega; \mathbb{R}^6)) \\ \bar{w} &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega; H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}^2))) \\ \hat{w} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega; H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}^6))), \quad \text{div } \hat{w} = 0 \end{aligned}$$

τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες

1. είναι όρια ακολουθιών ως εξής

- $w^\varepsilon \xrightarrow{*} w$ ασθενώς στον $L^\infty(0, T; W \times W)$
- $T_\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow w + \nabla_y \bar{w}$ ισχυρώς στον $H^1(0, T; L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6))$
- $T_\varepsilon(\text{curl } w^\varepsilon) \rightarrow \text{curl}_x w + \text{curl}_y \hat{w}$ ισχυρώς στον $L^2((0, T) \times \Omega \times Y; \mathbb{R}^6)$

2. είναι λύση του εξελικτικού προβλήματος

$$\frac{d}{dt}[A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t))] = K_x w(x, t) + K_y \hat{w}(x, y, t) - J(x, t), \quad \Omega \times Y \times (0, T) \quad (3.74)$$

$$w(x, 0) + \nabla_y \bar{w}(x, y, 0) = w^0, \quad (x, y) \in \Omega \times Y. \quad (3.75)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο αποδεικνύουμε τις ασθενείς συγκλίσεις των ακολουθιών w^ε , $T_\varepsilon w^\varepsilon$ και $T_\varepsilon(Nw^\varepsilon)$, στο δεύτερο δίνουμε το οριακό εξελικτικό πρόβλημα και στο τρίτο αποδεικνύουμε τις ισχυρές συγκλίσεις για τα πεδία $T_\varepsilon w^\varepsilon$ και $T_\varepsilon(Nw^\varepsilon)$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$.

1ο Μέρος -Ασθενείς συγκλίσεις

Υπάρχει μια τριάδα πεδίων (w, \bar{w}, \hat{w}) και υπακολουθίες, που συμβολίζονται όπως και οι ακολουθίες ώστε να έχουμε τις επόμενες ασθενείς συγκλίσεις

$$w^\varepsilon \xrightarrow{*} w \text{ στον } L^\infty(0, T; W \times W) \quad (3.76)$$

$$T_\varepsilon w^\varepsilon \xrightarrow{*} w + \nabla_y \bar{w} \text{ στον } L^\infty(0, T; L^2(\Omega; H(\text{curl}; Y))) \quad (3.77)$$

$$T_\varepsilon \left(\frac{dw^\varepsilon}{dt} \right) \xrightarrow{*} \frac{dw}{dt} + \nabla_y \frac{d\bar{w}}{dt} \text{ στον } L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6)) \quad (3.78)$$

$$T_\varepsilon(Nw^\varepsilon) \xrightarrow{*} N_x w + N_y \hat{w} \text{ στον } L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6)). \quad (3.79)$$

Από τις ισχυρές συγκλίσεις (3.71) και (3.72) προκύπτει ότι

$$\|w^{\varepsilon,0}\|_{W \times W} \leq c \text{ και } \|J^\varepsilon\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^6))} \leq c$$

οπότε όπως στο θεώρημα (3.2) της παραγράφου (3.2.3) αποδεικνύουμε ότι οι ακολουθίες $\{w^\varepsilon\}$ και $\{\frac{d}{dt}w^\varepsilon\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στους $L^\infty(0, T; W \times W)$ και $L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^6))$ και τέλος το θεώρημα (;;) της (2.3.3) αποδεικνύει τις παραπάνω ασθενείς συγκλίσεις.

2ο Μέρος: Το εξελικτικό πρόβλημα (3.74), (3.75): Ασθενής διατύπωση του (Q_h) .

Ολοκληρώνουμε την (3.70) στο $[0, t]$, πολλαπλασιάζουμε την προκύπτουσα με $v = (v_1, v_2)^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^6)$ και τέλος ολοκληρώνουμε στο Ω οπότε παίρνουμε την ασθενή διατύπωση του (Q_h)

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \cdot w^\varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} \int_0^t K w^\varepsilon \cdot v \, ds \, dx - \int_{\Omega} \int_0^t J^\varepsilon \cdot v \, ds \, dx + \int_{\Omega} A^\varepsilon w^{\varepsilon,0} \cdot v \, dx. \quad (3.80)$$

Θεωρούμε ως συνάρτηση δοκιμής την

$$v^\varepsilon(x) := \Phi(x) \otimes \Psi\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right), \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^6) \text{ και } \Psi \in C_0^\infty(Y; \mathbb{R}^6). \quad (3.81)$$

Για τη δράση του τελεστή εκδίπλωσης T_ε πάνω στην v^ε έχουμε

$$\begin{aligned} (T_\varepsilon v^\varepsilon)(x, y) &= v^\varepsilon\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y\right) = \Phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y\right) \otimes \Psi\left(\left\{\frac{\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y}{\varepsilon}\right\}\right) \\ &= \Phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y\right) \otimes \Psi\left(\left\{\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + y\right\}\right) \\ &= \Phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y\right) \otimes \Psi(y) \\ &= (T_\varepsilon \Phi)(x, y) \otimes \Psi(y) \end{aligned}$$

οπότε αξιοποιώντας την ισχυρή σύγκλιση $T_\varepsilon \Phi \rightarrow \Phi$, που ισχύει σύμφωνα με το (1) του θεωρήματος (;;) της παραγράφου (2.3.3) συμπεραίνουμε ότι

$$T_\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow \Phi \otimes \Psi \text{ στον } C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^6) \otimes C_0^\infty(Y; \mathbb{R}^6). \quad (3.82)$$

Εφαρμόζοντας κατά σειράν τις ιδιότητες (2.63) και (2.64) του τελεστή εκδίπλωσης T_ε στην (3.80), αφού προηγουμένως θέσουμε $v = v^\varepsilon$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon A^\varepsilon T_\varepsilon w^\varepsilon \cdot T_\varepsilon v^\varepsilon dx dy &= \int_{\Omega \times Y} \int_0^t T_\varepsilon(L_\beta w^\varepsilon) \cdot T_\varepsilon v^\varepsilon ds dx dy \\ &- \int_{\Omega \times Y} \int_0^t T_\varepsilon J^\varepsilon \cdot T_\varepsilon v^\varepsilon ds dx dy + \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon A^\varepsilon T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} \cdot T_\varepsilon v^\varepsilon dx dy. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Η παραπάνω ισότητα, αν λάβουμε υπόψη ότι

- $T_\varepsilon A^\varepsilon = A(y)$
- $T_\varepsilon w^\varepsilon \xrightarrow{*} w + \nabla_y \bar{w}$
- $T_\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow \Phi \otimes \Psi := \Theta$
- $T_\varepsilon(Kw^\varepsilon) \rightarrow K_x w + K_y \hat{w}$
- $T_\varepsilon(J^\varepsilon) \rightarrow J$ στον $W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6))$ λόγω της ιδιότητας 2) του θεωρήματος 2 της 3.2 αφού $J^\varepsilon \rightarrow J$ στον $W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^6))$ σύμφωνα με την υπόθεση (3.72)
- $T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} \rightarrow w^0$ στον $W(\Omega \times Y) \times W(\Omega \times Y)$ επειδή $w^{\varepsilon,0} \rightarrow w$ στον $W \times W$ όπου $W = W(\Omega)$ και ότι ο T_ε διατηρεί την ισχυρή σύγκλιση

μετατρέπεται στην

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} A(y)(w + \nabla_y \bar{w}) \cdot \Theta dx dy &= \int_{\Omega \times Y} \int_0^t (K_x w + K_y \hat{w}) \cdot \Theta ds dx dy \\ &- \int_{\Omega \times Y} \int_0^t J \cdot \Theta ds dx dy + \int_{\Omega \times Y} A(x)w^0 \cdot \Theta dx dy \end{aligned} \quad (3.84)$$

για κάθε $\Theta \in L^2(\Omega \times Y, \mathbb{R}^6)$ αφού το τανυστικό γινόμενο $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^6) \otimes C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^6)$ είναι πυκνό στον $L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6)$.

Με παραγωγή της (3.84) ως προς t , λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους είναι ανεξάρτητος του t και ότι ισχύει για κάθε $\Theta \in L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6)$ παίρνουμε τελικά

$$\frac{d}{dt}(A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) ds) = K_x w(x, t) + K_y \hat{w}(x, y, t) - J(x, t), \quad \Omega \times Y \times (0, T).$$

Επίσης, από την (3.84) και την αντιστρεψιμότητα του A προκύπτει

$$w(0) + \nabla_y \bar{w}(0) = w^0 \text{ στο } \Omega \times Y.$$

Επομένως, η τριάδα (w, \bar{w}, \hat{w}) είναι λύση του εξελικτικού προβλήματος (3.74)-(3.75).

3^ο Μέρος: Ισχυρές Συγκλίσεις

1^ο Βήμα: Ανισότητα για τους K και Λ

Έστω O ένας φραγμένος τόπος του \mathbb{R}^3 , v^ε μια ακολουθία στον $L^\infty(0, T, W \times W)$, ένα στοιχείο v του ίδιου χώρου και υποθέτουμε ότι $v^\varepsilon \xrightarrow{*} v$. Αν K και Λ δύο φραγμένοι τελεστές είναι άμεσα επαληθεύσιμη η ταυτότητα

$$Kv^\varepsilon \Lambda v^\varepsilon - Kv \Lambda v = K(v^\varepsilon - v)\Lambda(v^\varepsilon - v) + K(v^\varepsilon - v)\Lambda v + Kv\Lambda(v^\varepsilon - v) \quad (3.85)$$

και η εκτίμηση

$$\int_O K(s)(v^\varepsilon(s) - v(s))\Lambda(s)(v^\varepsilon(s) - v(s)) dx \leq \|K(s)\| \|\Lambda(s)\| \|v^\varepsilon(s) - v(s)\|_2^2, \text{ στον } (0, T). \quad (3.86)$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_O K(s)(v^\varepsilon(s) - v(s))\Lambda(s)(v^\varepsilon(s) - v(s)) dx \leq \|K(s)\| \|\Lambda(s)\| g^2(s) \quad (3.87)$$

όπου $g(s) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^\varepsilon(s) - v(s)\|_2$.

Επειδή $v^\varepsilon \xrightarrow{*} v$ και K φραγμένος έχουμε ότι $Kv^\varepsilon \xrightarrow{*} Kv$ οπότε

$$\int_O Kv^\varepsilon \Lambda v dx \rightarrow \int_O Kv \Lambda v$$

δηλαδή $\int_O K(v^\varepsilon - v)\Lambda v dx \rightarrow 0$. Παρόμοια, βρίσκουμε ότι και $\int_O Kv\Lambda(v^\varepsilon - v) dx \rightarrow 0$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$.

Με τη βοήθεια αυτών και το λήμμα Fatou από την (3.85) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^t \int_O K(s)v^\varepsilon(s)\Lambda(s)v^\varepsilon(s) dx ds - \int_0^t \int_O K(s)v(s)\Lambda(s)v(s) dx ds \right) \\ \leq \int_0^t \|K(s)\| \|\Lambda(s)\| g^2(s). \end{aligned} \quad (3.88)$$

2ο Βήμα: Ένας νόμος διατήρησης για το (Q_h)

Θεώρημα 3.14. Αν w^ε είναι η λύση του (Q_h) και τα K και Λ όπως ορίστηκαν με την (3.69) τότε ισχύει

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon(x) w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx - 2 \int_0^t \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot \Lambda w^\varepsilon dx ds + 2 \int_0^t \int_{\Omega} J^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx ds = \int_{\Omega} A^\varepsilon w^{\varepsilon,0} \cdot w^{\varepsilon,0} dx. \quad (3.89)$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon w^\varepsilon) &= K w^\varepsilon - J^\varepsilon \\ \frac{d}{dt}(A^\varepsilon w^\varepsilon) \cdot w^\varepsilon &= K w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon - J^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \\ \int_{\Omega} \frac{d}{dt}(A^\varepsilon w^\varepsilon) \cdot w^\varepsilon dx &= \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx - \int_{\Omega} J^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx \end{aligned}$$

η οποία με την αξιοποίηση της συμμετρίας του A^ε γράφεται

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A^\varepsilon w^\varepsilon) \cdot w^\varepsilon dx = \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx - \int_{\Omega} J^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx$$

από την οποία με ολοκλήρωση στο $(0, t)$ βρίσκουμε

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx = 2 \int_0^t \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx - 2 \int_0^t \int_{\Omega} J^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx + \int_{\Omega} A^\varepsilon w^{\varepsilon,0} \cdot w^{\varepsilon,0} dx. \quad (3.90)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon &= \int_{\Omega} M L_\beta^{-1} w^\varepsilon \cdot w^\varepsilon dx = \int_{\Omega} M u^\varepsilon \cdot L_\beta u^\varepsilon \\ &= \int_{\Omega} M u^\varepsilon \cdot (u^\varepsilon + \beta N u^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} M u^\varepsilon \cdot u^\varepsilon dx \\ &= \int_{\Omega} M L_\beta^{-1} w^\varepsilon \cdot L_\beta^{-1} w^\varepsilon dx = \int_{\Omega} K w^\varepsilon \cdot \Lambda w^\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Η (3.90) με τη βοήθεια της (3.91) δίνει τη ζητούμενη σχέση (3.89). \square

Παρατήρηση: Οι σχέσεις (3.85), (3.86), (3.87), (3.88) και η (3.89), η τελευταία σύμφωνα με την (3.91), ισχύουν και για $\Lambda = I$ δηλαδή τον ταυτοτικό τελεστή, όπως εύκολα προκύπτει.

3^ο Βήμα: Ένα χρήσιμο λήμμα

Λήμμα 3.15. Αν (w, \bar{w}, \hat{w}) όπως στις (3.76), (3.77), (3.79) και J, w^0 όπως στις (3.71), (3.72) αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} A(w + \nabla_y \bar{w}) \cdot (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy &= 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(w + \nabla_y \bar{w}) \cdot (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds \\ &- 2 \int_0^t \int_{\Omega} J(s) \cdot w(s) dx ds + \int_{\Omega} Aw^0 \cdot w^0 dx. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Απόδειξη. Από την (3.74) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t))] \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) &= (K_x w(x, t) + K_y \hat{w}(x, y, t) \\ &- J(x, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} \frac{d}{dt} [A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t))] \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy &= \int_{\Omega \times Y} (K_x w(x, t) \\ &+ K_y \hat{w}(x, y, t) - J(x, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy \end{aligned}$$

η οποία λόγω της συμμετρίας του πίνακα A γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega \times Y} A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy \\ = \int_{\Omega \times Y} (K_x w(x, t) + K_y \hat{w}(x, y, t) - J(x, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy. \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση της τελευταίας ισότητας στο $[0, t], t > 0$ και αξιοποίηση της (3.75) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy &= 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} (K_x w(x, t) \\ &+ K_y \hat{w}(x, y, t) - J(x, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy ds + \int_{\Omega \times Y} A(y)w^0 \cdot w^0 dx dy. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Αλλά με εφαρμογή των ταυτοτήτων

$$d(uF) = u \operatorname{div} F + F \cdot \nabla u, \quad \operatorname{curl}(uF) = u \operatorname{curl} F + (\nabla u) \times F$$

όπου το βαθμωτό πεδίο u και το διανυσματικό πεδίο F έχουν την απαιτούμενη ομαλότητα των θεωρημάτων Gauss και Stokes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial \Omega} F \cdot \hat{n} ds, \quad \int_{\Omega} \operatorname{curl} F \cdot ds = \int_{\partial \Omega} F \cdot ds$$

3.3. ΟΜΟΙΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

και με αξιοποίηση της Y -περιοδικότητας των πεδίων \bar{w} και \hat{w} , που περιέχονται στην (3.93) αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} K_x w(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy &= 0, \quad \int_{\Omega \times Y} K_y \hat{w}(x, y, t) \cdot w(x, t) dx dy = 0 \\ \int_{\Omega \times Y} K_y \hat{w}(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy &= 0 \text{ και } \int_{\Omega \times Y} J(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} K_x w(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy &= \int_{\Omega \times Y} M_x L_\beta^{-1} w \cdot \nabla_y \bar{w} dx dy = \\ &= \int_{\Omega \times Y} M_x u(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w} dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} [\text{curl}_x u_2(x, t) \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) - \text{curl}_x u_1(x, t) \nabla_y \bar{w}_2(x, y, t)] dx dy. \end{aligned} \quad (3.95)$$

όπου $u = (u_1, u_2)^T$. Αλλά

$$\int_{\Omega \times Y} \text{curl}_x u_2(x, t) \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) dx dy = \int_{\Omega \times Y} F(x, t) \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) dx dy$$

και

$$\text{div}_y(w_1 F) = \bar{w}_1 \text{div}_y F(x) + F \cdot \nabla_y \bar{w}_1, \text{ όπου } F(x, t) = \text{curl}_x u_2(x, t)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} \text{curl}_x u_2(x, t) \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) dx dy &= \int_{\Omega} \int_Y \text{div}_y(\bar{w}_1 \text{curl}_x u_2(x, t)) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\partial Y} \bar{w}_1 \text{curl}_x u_2(x, t) \hat{\eta}_y ds_y dx = \int_{\Omega} \text{curl}_x u_2(x, t) \int_{\partial Y} \bar{w}_1(x, y, t) \hat{\eta}_y ds_y dx = 0 \end{aligned}$$

γιατί το $\int_{\partial Y} \bar{w}_1(x, y, t) \hat{\eta}_y ds_y = 0$ λόγω της Y -περιοδικότητας της \bar{w}_1 . Όμοια βρίσκουμε ότι και $\int_{\Omega \times Y} \text{curl}_x u_1(x, t) \nabla_y \bar{w}_2(x, y, t) = 0$ οπότε από την (3.95) προκύπτει η πρώτη ισότητα της (3.94).

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} K_y \hat{w}(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy & \quad (3.96) \\ &= \int_{\Omega \times Y} [\text{curl}_y \hat{u}_2(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 - \text{curl}_y \hat{u}_1 \cdot \nabla_y \bar{w}_2(x, y, t)] dx dy \end{aligned}$$

και παίρνουμε πάλι το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega \times Y} \operatorname{curl}_y \hat{u}_2(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) = \int_{\Omega \times Y} F(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t)$$

όπου $F(x, y, t)$ Y -περιοδική συνάρτηση ως προς y . Από την

$$\operatorname{div}_y(\bar{w}_1 F) = \bar{w}_1 \operatorname{div}_y F + F \cdot \nabla_y \bar{w}_1 = \bar{w}_1 \operatorname{div}_y(\operatorname{curl}_y \hat{u}_2) + F \cdot \nabla_y \bar{w}_1 = F \cdot \nabla_y \bar{w}_1$$

γιατί $\operatorname{div}_y \operatorname{curl}_y = 0$ οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\Omega \times Y} \operatorname{div}_y(\bar{w}_1 F) dy dx = \int_{\Omega} \int_{\partial Y} \bar{w}_1 F ds_y dx = 0$$

γιατί λόγω της Y -περιοδικότητας του γινομένου $\bar{w}_1 F$ ως προς y είναι $\int_{\partial Y} \bar{w}_1 F ds_y = 0$.

Όμοια βρίσκουμε ότι μηδενίζεται και το 2^ο ολοκλήρωμα της (;;) οπότε

$$\int_{\Omega \times Y} K_y \hat{w}(x, y, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy = 0.$$

Για το ολοκλήρωμα της εξωτερικής πηγής έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} J(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w}(x, y, t) dx dy & (3.97) \\ & = \int_{\Omega \times Y} [J_1(x, t) \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) + J_2(x, y) \nabla_y \bar{w}_2(x, y, t)] dx dy \end{aligned}$$

όπου $J = (J_1, J_2)^T$ και $\bar{w} = (w_1, w_2)^T$, με w_i βαθμωτά πεδία. Επειδή

$$\operatorname{div}_y(\bar{w}_1 J_1) = \bar{w}_1 \operatorname{div}_y J_1(x) + J_1(x) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 = J_1(x) \cdot \nabla_y \bar{w}_1$$

το πρώτο ολοκλήρωμα της προηγούμενης ισότητας γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} J_1(x, t) \cdot \nabla_y \bar{w}_1(x, y, t) dx dy = \int_{\Omega \times Y} \operatorname{div}_y(\bar{w}_1 J_1) dy dx = \int_{\Omega} \int_Y \operatorname{div}_y(\bar{w}_1 J_1) dy dx \\ & = \int_{\Omega} \int_{\partial Y} \bar{w}_1(x, y, t) J_1(x, t) \hat{\eta}_y ds_y dx = \int_{\Omega} J_1(x, t) \int_{\partial Y} \bar{w}_1(x, y, t) \hat{\eta}_y ds_y dx = 0 \end{aligned}$$

γιατί πάλι μηδενίζεται λόγω περιοδικότητας της \bar{w}_1 . Όμοια βρίσκουμε ότι μηδενίζεται και το 2ο ολοκλήρωμα της (3.97). Άρα, $\int_{\Omega \times Y} J \nabla_y \bar{w} dx dy = 0$.

Σχετικά με το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega \times Y} K_y \bar{w} w dx dy$, παρατηρούμε ότι αναλύοντας όπως και προηγουμένως τον K_y , θέτοντας

$$\hat{u} = L_{\beta}^{-1} \hat{w}, \hat{u} = (u_1, u_2, u_3), w = w(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$$

3.3. ΟΜΟΙΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του curl, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού αναγεται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

$$\int_{\Omega} w_K(x) \int_Y \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_j} dy$$

με \hat{u}_i Y -περιοδικές ως προς y , οπότε από την $\int_Y \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_j} dy = \int_{\partial Y} \hat{u}_i \hat{n}_j(y) ds_y = 0$ από την περιοδικότητα. Άρα, και το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται. Με χρήση πλέον της (3.94) η (3.93) μετατρέπεται στην

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} A(y)(w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) \cdot (w(x, t) + \nabla_y \bar{w}(x, y, t)) dx dy \quad (3.98) \\ &= 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K_x w \cdot w(x, t) dx dy ds - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} J(x, t) \cdot w(x, t) dx dy ds \\ & \quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) w^0 \cdot w^0 dx dy. \quad (3.99) \end{aligned}$$

Όμως, όπως αποδείξαμε την πρώτη και την τρίτη σχέση από την (3.94) μπορούμε να αποδείξουμε επίσης ότι:

$$\int_{\Omega \times Y} K w \cdot \nabla_y \bar{w} dx dy = 0 \text{ και } \int_{\Omega \times Y} K \cdot \nabla_y \bar{w} w dx dy = 0. \quad (3.100)$$

Επίσης, αξιοποιώντας επιπλέον τις $\operatorname{div}_y \operatorname{curl}_x = -\operatorname{div}_x \operatorname{curl}_y$ και $\operatorname{curl} \operatorname{grad} = 0$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\Omega \times Y} K \nabla_y \bar{w} \cdot \nabla_y \bar{w} dx dy = 0. \quad (3.101)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} K \nabla_y \bar{w} \cdot \nabla_y \bar{w} dx dy = \int_{\Omega \times Y} M_x(L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}) \nabla_y \bar{w} dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} (\operatorname{curl}_x(L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}_2)) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 - \operatorname{curl}_x(L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}_2) \cdot \nabla_y \bar{w}_2 dx dy. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega \times Y} \operatorname{curl}_x(L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}_2) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 dx dy = \int_{\Omega \times Y} F(x, y) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 dx dy$$

όπου F Y -περιοδική ως προς Y . Παίρνοντας div έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y(\bar{w}_1 F) &= \bar{w}_1 \operatorname{div}_y F(x, y) + F \nabla \bar{w}_1 = \bar{w}_1 \operatorname{div}_y(\operatorname{curl}_x L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}_2) + F \nabla \bar{w}_1 \\ &= -\bar{w}_1 \operatorname{div}_x(\operatorname{curl}_y L_\beta^{-1} \nabla_y \bar{w}_2) + F \nabla \bar{w}_1 \\ &= -\bar{w}_1 \operatorname{div}_x(\operatorname{curl}_y \nabla_y(L_\beta^{-1} \bar{w}_2)) + F \nabla \bar{w}_1 \\ &= F \nabla_y \bar{w}_1 \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{\Omega \times Y} F(x, y) \cdot \nabla_y \bar{w}_1 = \int_{\Omega} \int_Y \operatorname{div}_y (\bar{w}_1 F) = \int_{\Omega} \int_{\partial Y} \bar{w}_1 F \cdot \hat{\eta}_y ds_y = 0$$

αφού $\bar{w}_1 F$ Y -περιοδική. Η (3.98) με τη βοήθεια των (3.100) και (3.101) γίνεται

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w}) \cdot (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy = \\ & 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K (w + \nabla_y \bar{w}) \cdot (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} J \cdot w dx dy ds \\ & \quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) w^0 \cdot w^0 dx dy \end{aligned}$$

που είναι η ζητούμενη ισότητα (3.92). \square

4^ο Βήμα: Σύγκλιση στον $L^2(\Omega \times Y \times (0, T), \mathbb{R}^6)$

Εφαρμόζουμε τον τελεστή εκδίπλωσης T_ε και στα δύο μέλη της (3.89), οπότε αξιοποιώντας τις ιδιότητες (2.62), (2.63) και (2.64) με $|Y| = 1$ και (3.88) του T_ε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^\varepsilon T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon (K w^\varepsilon) T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy dt \\ & \quad + 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon (J^\varepsilon) T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy ds = \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} dx dy. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Από την πιεστικότητα του πίνακα A έχουμε

$$\begin{aligned} & \gamma \| T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w}) \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \leq \\ & \leq \int_{\Omega \times Y} A(y) (T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w})) (T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w})) dx dy \\ & \leq \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^\varepsilon T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy - 2 \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^\varepsilon (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy \\ & \quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w}) (w + \nabla_y \bar{w}) \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας τον α' όρο του β' μέλους με το ίσο του από την (3.103) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \gamma \| T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w}) \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 & \leq 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon (K w^\varepsilon) T_\varepsilon w^\varepsilon - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon (J^\varepsilon) T_\varepsilon w^\varepsilon \\ & \quad + \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} - 2 \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^\varepsilon (w + \nabla_y \bar{w}) \\ & \quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w}) (w + \nabla_y \bar{w}). \end{aligned}$$

Με οδηγό την (3.88) για $\Lambda = I$ γράφουμε την παραπάνω σχέση ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma \|T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w})\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 &\leq 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(T_\varepsilon w^\varepsilon) T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon J^\varepsilon T_\varepsilon w^\varepsilon dx dy ds + \int_{\Omega \times Y} A(y) T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} dx dy \\ &\quad - 2 \int_{\Omega \times Y} T_\varepsilon w^\varepsilon (w + \nabla_y \bar{w}) dx dy + \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα αυτή για $\varepsilon \rightarrow 0$, χρησιμοποιώντας για τους δύο πρώτους όρους του β' μέλους την (3.88) και λαμβάνοντας υπόψη τις ισχυρές συγχλίσεις $T_\varepsilon J^\varepsilon \rightarrow J$ και $T_\varepsilon w^{\varepsilon,0} \rightarrow w^0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \gamma \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|T_\varepsilon w^\varepsilon - (w + \nabla_y \bar{w})\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 &\leq 2 \|K\|_\infty \int_0^t g^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} J(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds \\ &\quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) w^0 w^0 dx dy - 2 \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy \end{aligned}$$

η οποία αν λάβουμε υπόψη την τελευταία από τις (;), γράφεται

$$\begin{aligned} \gamma g^2(t) &\leq 2 \|K\|_\infty \int_0^t g^2(s) ds + 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} K(w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega \times Y} J w dx dy ds + \int_{\Omega \times Y} A(y) w^0 w^0 dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega \times Y} A(y) (w + \nabla_y \bar{w})(w + \nabla_y \bar{w}) dx dy \end{aligned}$$

η οποία με τη βοήθεια της (3.92) γίνεται $\gamma g^2(t) \leq 2 \|K\|_\infty \int_0^t g^2(s) ds$ οπότε από την ανισότητα Gronwall συνεπάγεται ότι $g^2(t) \leq 0$ άρα $g(t) = 0$ οπότε $T_\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow w + \nabla_y \bar{w}$ στον $L^2(\Omega \times Y)$.

Τότε από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue έχουμε την ισχυρή σύγκλιση

$$T_\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow w + \nabla_y \bar{w} \text{ στον } L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6). \quad (3.103)$$

5^ο Βήμα: Ισχυρή σύγκλιση στον $H^1(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6)$

Επειδή ο πίνακας A^ε είναι ανεξάρτητος του t η (3.70) γράφεται

$$A^\varepsilon \frac{dw^\varepsilon}{dt} = Kw^\varepsilon - J^\varepsilon \quad (3.104)$$

και επομένως

$$A^\varepsilon \frac{dw^\varepsilon}{dt}(0) = Kw^\varepsilon(0) - J^\varepsilon(0). \quad (3.105)$$

Παραγωγίζοντας την (3.104) ως προς t βρίσκουμε ότι το πεδίο

$$v^\varepsilon := \frac{dw^\varepsilon}{dt}$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$A^\varepsilon \frac{dv^\varepsilon}{dt} = Kv^\varepsilon - \frac{dJ^\varepsilon}{dt}$$

με αρχική συνθήκη την (3.105).

Επομένως, έχουμε το εξελικτικό πρόβλημα

$$(Q'_h) : \begin{cases} A^\varepsilon \frac{dv^\varepsilon}{dt} = Kv^\varepsilon - \frac{dJ^\varepsilon}{dt} \\ v^\varepsilon(x, 0) = (A^\varepsilon)^{-1}(Kw^\varepsilon(0) - \frac{dJ^\varepsilon}{dt}t(0)) := v^{\varepsilon,0}(x). \end{cases} \quad (3.106)$$

Με τις υποθέσεις

$$\frac{dJ^\varepsilon}{dt} \rightarrow \frac{dJ}{dt} \text{ στον } L^1((0, T); L^2(\Omega; \mathbb{R}^6)) \quad (3.107)$$

$$v^{\varepsilon,0} := \frac{dw^{\varepsilon,0}}{dt} \rightarrow \frac{dw^0}{dt} := v^0 \text{ στον } W \times W, t > 0 \quad (3.108)$$

που απορρέουν από τις υποθέσεις για τα πεδία J^ε και $w^{\varepsilon,0}$. Τότε αποδεικνύεται όπως και για τη λύση του (Q_h) ότι

$$T^\varepsilon \left(\frac{d}{dt} w^\varepsilon \right) \rightarrow \frac{dw}{dt} + \nabla_y \left(\frac{d\bar{w}}{dt} \right) \text{ στον } L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6). \quad (3.109)$$

Από τις (3.103), (3.109) προκύπτει η ισχυρή σύγκλιση στον $H^1(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6)$.

6^ο Βήμα: Ισχυρή σύγκλιση της ακολουθίας $T_\varepsilon(Kw^\varepsilon)$

Στο προηγούμενο βήμα είδαμε ότι το πεδίο w^ε ικανοποιεί την (3.104). Με εφαρμογή σε αυτήν του τελεστή εκδίπλωσης T_ε και αξιοποίηση της (2.61) βρίσκουμε

$$T_\varepsilon(Kw^\varepsilon) = A T_\varepsilon \left(\frac{d}{dt} w^\varepsilon \right) + T_\varepsilon J^\varepsilon. \quad (3.110)$$

Από την ασθενή σύγκλιση

$$T_\varepsilon(Kw^\varepsilon) \rightharpoonup K_x w + K_y \hat{w}$$

την (3.109), την $T_\varepsilon J^\varepsilon \rightarrow J$ και το μονοσήμαντο του ασθενούς και του ισχυρού ορίου για $\varepsilon \rightarrow 0$, από την (3.110) παίρνουμε

$$K_x w + K_y \hat{w} = A \left(\frac{dw}{dt} + \nabla_y \frac{d\bar{w}}{dt} \right) + J. \quad (3.111)$$

Από τις (3.110) και (3.111) προκύπτει

$$T_\varepsilon(Kw^\varepsilon) - (K_x w + K_y \hat{w}) = A \left[T_\varepsilon \left(\frac{d}{dt} w^\varepsilon \right) - \left(\frac{dw}{dt} + \nabla_y \frac{d\bar{w}}{dt} \right) \right] + (T_\varepsilon J^\varepsilon - J)$$

από την οποία σύμφωνα με τις ισχυρές συγκλίσεις (3.107) και $T_\varepsilon J^\varepsilon \rightarrow J$ έχουμε

$$T_\varepsilon(Kw^\varepsilon) \rightarrow K_x w + K_y \hat{w} \text{ στον } L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6).$$

□

3.3.3 Συμπεράσματα

Συνέπεια πλέον του θεωρήματος (3.12) είναι το επόμενο θεώρημα που αφορά στη λύση του προβλήματος (P_h) .

Θεώρημα 3.16. Υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή $u^{\varepsilon,0}$, ο όρος πηγής J^ε και ο πίνακας A^ε , ικανοποιούν τις υποθέσεις 1 και 2 της παραγράφου 3.1. Έστω $u^\varepsilon \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}, t \geq 0$ η λύση του προβλήματος (P_h) , τότε υπάρχει μια τριάδα πεδίων (u, \bar{u}, \hat{u}) με $u \in L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}) \cap W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega; \mathbb{R}^6))$, $\bar{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H^1_{\text{per}}(Y; \mathbb{R}^2))$ και

$$\hat{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y; \mathbb{R}^6))) : \text{div}_x \hat{u} = 0$$

τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες

- $u^\varepsilon \xrightarrow{*} u$ στον $L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}})$
- $T_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u + \bar{u}$ στον $H^1(0, T; L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^6))$
- $T_\varepsilon(\text{curl } L_\beta u^\varepsilon) \rightarrow \text{curl}_x L_\beta u + \text{curl}_y \hat{u}$ στον $L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6)$

Απόδειξη. Από τη σύγκλιση $w^\varepsilon \xrightarrow{*} w$ στον $L^\infty(0, T, W \times W)$ του θεωρήματος (3.12) και το φραγμένο του τελεστή $L_\beta^{-1} : W \times W \mapsto W_{\text{curl}} \mapsto W_{\text{curl}}$ συμπεραίνουμε ότι

$$L_\beta^{-1} w^\varepsilon \xrightarrow{*} L_\beta^{-1} w$$

στον $L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}})$ οπότε αν θέσουμε $L_\beta^{-1} w := u \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ έχουμε

$$u^\varepsilon \xrightarrow{*} u \text{ στον } L^\infty(0, T; W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}).$$

Όμοια, από την σχέση $T_\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow w + \nabla_y \bar{w}$ στον $L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6)$ το φραγμένο, τη γραμμικότητα του L_β^{-1} και την (3.66) προκύπτει

$$T_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u + \bar{u} \text{ στον } L^2(\Omega \times Y \times (0, T); \mathbb{R}^6)$$

όπου $\bar{u} := L_\beta^{-1}(\nabla_y \bar{w})$.

Από το θεώρημα (3.12) (6^ο βήμα) και τις $L_\beta^{-1} w^\varepsilon = u^\varepsilon$, $L_\beta^{-1} w = u$ συμπεραίνουμε ότι

$$T_\varepsilon(Mu^\varepsilon) \rightarrow M_x u + M_y \hat{u}$$

όπου $\hat{u} = L_\beta^{-1} \hat{w} \in W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$. □

3.3.4 Σχόλιο για τη συνέχεια της λύσης u^ε ως προς β στο σημείο $\beta = 0$

Η λύση u^ε του προβλήματος (3.58) είναι φανερό ότι εξαρτάται από το μέτρο χειρομορφίας β του περιβάλλοντος εντός του οποίου εξελίσσεται το φαινόμενο. Στην περίπτωση που το υλικό είναι μη-χειρόμορφο έχουμε $\beta = 0$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει συνέχεια της λύσης u^ε ως προς β στο σημείο $\beta = 0$.

Όταν $\beta = 0$ το πρόβλημα (3.58), λόγω και της αντιστρεψιμότητας του πίνακα A^ε μετατρέπεται στο

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u^\varepsilon = \mathcal{M}u^\varepsilon - F^\varepsilon, & x \in \Omega, t \in (0, T) \quad T > 0 \\ u^\varepsilon(x, 0) := u^{\varepsilon,0}, & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.112)$$

όπου $\mathcal{M} = (A^\varepsilon)^{-1}M$, $F^\varepsilon = (A^\varepsilon)^{-1}J^\varepsilon$ και $D(\mathcal{M}) = W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$.

Στην απόδειξη της ύπαρξης λύσης του (3.58) αξιοποιήθηκε το γεγονός ότι ο τελεστής ML_β^{-1} είναι φραγμένος αφού αυτός ήταν τελεστής με πεδίο ορισμού ολόκληρο τον χώρο Hilbert $W \times W$ και τιμές στον ίδιο χώρο και ήταν και κλειστός (θεώρημα κλειστού γραφήματος). Στο παραπάνω πρόβλημα δεν έχουμε την ίδια κατάσταση.

Για τον τελεστή όμως $\mathcal{M} : W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}} \subset W \times W \mapsto W \times W$ αποδεικνύεται ότι ισχύουν

- $\langle \mathcal{M}u, w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, -\mathcal{M}w \rangle_{\mathcal{H}}$ για κάθε $u \in D(\mathcal{M})$ και $w \in W \times W = \mathcal{H}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται με την ισότητα (3.51)
- οι τελεστές $I \pm \mathcal{M}$ έχουν πυκνό πεδίο τιμών στον \mathcal{H} , όπου I ο ταυτοτικός πίνακας.

επομένως ο \mathcal{M} είναι αντίαυτοσυζυγής δηλαδή $\mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$ οπότε από το θεώρημα Stone, [41] είναι ο γεννήτορας μιας C_0 μοναδιαίας ομάδας φραγμένων τελεστών $v(t)$ επί του $W \times W$. Από το θεώρημα (5.50) [41] συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα μας, για $u^{\varepsilon,0} \in D(\mathcal{M})$ και $F^\varepsilon \in C^1([0, +\infty), \mathcal{H})$ έχει μια μοναδική λύση $u^\varepsilon \in C^1([0, \infty), \mathcal{H})$ με τιμές στον $D(\mathcal{M})$. Η λύση αυτή δίνεται απο τον τύπο

$$u^\varepsilon(t) = v_+(t)u^{\varepsilon,0} + \int_0^t v_+(t-s)F(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

όπου $v_+(t) = v(t)$ για $t \geq 0$.

Όταν $\beta \neq 0$ για παράδειγμα $\beta > 0$ και $\beta \rightarrow 0$ έχουμε ότι $-\frac{1}{\beta} \rightarrow -\infty$. Ο τελεστής $S : W_{\text{curl}} \subset W \rightarrow W$, $Su = \text{curl } u$, που είναι αυτοσυζυγής, έχει μόνο σημειακό φάσμα στο \mathbb{R} με σημεία συσσώρευσης το $-\infty$ και το $+\infty$.

Γι'αυτό ενδέχεται $-\frac{1}{\beta} \in \sigma_p(S)$ οπότε ο τελεστής L_β με $D(L_\beta) = W_{\text{curl}} \times W_{\text{curl}}$ δεν αντιστρέφεται και επομένως ακόμη και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις $\varepsilon(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ και $\mu(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ είναι σταθερές και η λύση δίνεται από τον τύπο ανάλογο του (50), ο τύπος αυτός δεν έχει νόημα αφού περιέχει τον L_β^{-1} .

Επομένως, δεν είναι δυνατό να εξεταστεί η συνέχεια της λύσης ως προς β στο σημείο $\beta = 0$, για κάθε $\beta > 0$ οσοδήποτε μικρό.

Κεφάλαιο 4

Το φασματικό πρόβλημα σε μια διανισοτροπική κοιλότητα

4.1 Χρονικά Αρμονικά Πεδία

4.1.1 Χρονο-αρμονικές συναρτήσεις στο \mathbb{R}

Θεωρούμε τις πραγματικές σταθερές A, ω και ϕ με $A > 0, \omega > 0$ και $\phi \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.1)$$

της χρονικής μεταβλητής t , η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, στη Φυσική λέγεται χρονο-αρμονική συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (4.2)$$

όπου a, b πραγματικές, μη μηδενικές σταθερές. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή (4.1). Πράγματι, θεωρούμε σε ορθοκανονικό σύστημα Oxy καρτεσιανών συντεταγμένων το σημείο $M(b, -a)$, την ημιευθεία Ot , που ορίζουν τα σημεία O και M και ονομάζουμε ϕ μια γωνία με αρχική πλευρά τον Ox και τελική την Ot . Τότε,

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{b}{\rho} \\ \sin \phi = \frac{-a}{\rho} \end{cases} \quad (4.3)$$

όπου $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές των a, b στο δεξί μέλος της (4.2) παίρνουμε

$$f(t) = \rho \cos(\omega t + \phi). \quad (4.4)$$

Επομένως, λέγοντας χρονο-αρμονική συνάρτηση (στο \mathbb{R}) θα εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής (4.1) ή (4.2).

4.1.2 Μιγαδική αναπαράσταση χρονο-αρμονικών συναρτήσεων

Επειδή οι εκθετικές μιγαδικές συναρτήσεις διευκολύνουν τον λογισμό, έναντι των τριγωνομετρικών και τα αποτελέσματα είναι πιο γενικά, θα εκφράσουμε την αρμονική συνάρτηση της μορφής (4.1) με τη βοήθεια μιγαδικών. Βάση γι' αυτή την μετατροπή αποτελεί η ταυτότητα Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Από την (4.5) και τις ιδιότητες $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ προκύπτει ότι

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta. \quad (4.6)$$

Από την (4.6) έχουμε $\operatorname{Re}[e^{i\theta}] = \cos\theta$ οπότε και $\cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[e^{-i(\omega t + \phi)}]$ και με αντικατάσταση αυτής στην (4.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= A \operatorname{Re}[e^{-i(\omega t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re}[Ae^{-i\omega t - i\phi}] \\ &= \operatorname{Re}[Ae^{-i\phi} e^{-i\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[f e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

όπου $f := Ae^{-i\phi}$ μιγαδικός, που λέγεται φάσoρας της f .

Επομένως, η αρμονική συνάρτηση (4.1) παίρνει τη μορφή

$$f(t) = \operatorname{Re}[f e^{-i\omega t}], \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{όπου } f \in \mathbb{C}. \quad (4.7)$$

Αποδεικνύεται η επόμενη,

Πρόταση 4.1. Για κάθε χρονο-αρμονική συνάρτηση f της μορφής (4.1) υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός f που ικανοποιεί την (4.1.3).

Απόδειξη. Η ύπαρξη του f προκύπτει από την απόδειξη της (4.1.3). Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο μιγαδικοί f_1 και f_2 ώστε να ισχύει η (4.1.3). Τότε

$$\operatorname{Re}[f_1 e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re}[f_2 e^{-i\omega t}], \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

Για $t = 0$ από την (4.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\operatorname{Re}[f_1] = \operatorname{Re}[f_2] \quad (4.9)$$

Για $t = \frac{\pi}{2\omega}$ από την (4.8) πάλι βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f_1 e^{-i\frac{\pi}{2}}] &= \operatorname{Re}[f_2 e^{-i\frac{\pi}{2}}] \Leftrightarrow \\ \operatorname{Re}[f_1(-i)] &= \operatorname{Re}[f_2(-i)] \Leftrightarrow \\ \operatorname{Im}[f_1] &= \operatorname{Im}[f_2] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Από (4.9) και (4.10) συμπεραίνουμε ότι $f_1 = f_2$ που είναι το ζητούμενο. \square

Από την προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(t) = \operatorname{Re}[-i\omega f(t)e^{-i\omega t}], \quad t \in \mathbb{R}$$

Πράγματι, έχουμε διαδοχικά

$$f(t) = \operatorname{Re}[fe^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}[fe^{-i\omega t} + \bar{f}e^{i\omega t}]$$

οπότε

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2}[fe^{-i\omega t}(-i\omega) + \bar{f}e^{i\omega t}(i\omega)] \\ &= \frac{1}{2}[fe^{-i\omega t}(-i\omega) + \overline{fe^{-i\omega t}(i\omega)}] \\ &= \operatorname{Re}[-i\omega fe^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

4.1.3 Μιγαδική αναπαράσταση χρονο-αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων

Η μιγαδική αναπαράσταση χρονο-αρμονικών βαθμωτών συναρτήσεων $f(t)$ μπορεί να επεκταθεί και σε διανυσματικές. Πράγματι, έστω $\mathcal{F}(t)$ μια πραγματική χρονο-μεταβαλλόμενη διανυσματική συνάρτηση, με χρονο-αρμονικές καρτεσιανές συντεταγμένες $f_i(t) = A_i \cos(\omega t + \phi_i)$, $i = 1, 2, 3$ όπου A_i, ϕ_i πραγματικά χρονο-ανεξάρτητα και $\omega > 0$ η κοινή γωνιακή συχνότητα. Αν $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος $Oxyz$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} \\ &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \hat{i} + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \hat{j} + A_3 \cos(\omega t + \phi_3) \hat{k} \\ &= \operatorname{Re}[(f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k})] \\ &= \operatorname{Re}[Fe^{-i\omega t}] \quad \text{όπου } F = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k}. \end{aligned}$$

Επομένως, κάθε χρονο-αρμονικά μεταβαλλόμενη διανυσματική πραγματική συνάρτηση \mathcal{F} , παίρνει κατά μοναδικό τρόπο τη μορφή

$$\mathcal{F} = \operatorname{Re}[Fe^{-i\omega t}] \quad (4.11)$$

όπου F μιγαδικό χρονο-ανεξάρτητο διάνυσμα που δίνεται από την ισότητα

$$F = A_1 e^{-i\phi_1} \hat{i} + A_2 e^{-i\phi_2} \hat{j} + A_3 e^{-i\phi_3} \hat{k}.$$

Σχόλιο

Η επιλογή του εκθετικού $e^{-i\omega t}$ και όχι του $e^{i\omega t}$ στη μιγαδική αναπαράσταση

μιας χρονο-αρμονικής βαθμωτής ή διανυσματικής συνάρτησης σχετίζεται με τη μορφή του απομακρυνόμενου από την πηγή κύματος ή του μετακινούμενου προς τα «δεξιά» του άξονα $x'x$ ενός μονοδιάστατου κύματος $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Πράγματι, ως θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$u(x, t) = \cos(kx - \omega t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (4.12)$$

όπου $k > 0$ και $\omega > 0$. Έυκολα επαληθεύεται ότι η $u(x, t)$ είναι λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{όπου } c := \frac{\omega}{k}$$

Καθώς το θετικό t αυξάνει η γραφική παράσταση της $u(x, t)$ με t σταθερό μετακινείται προς τα «δεξιά». Πράγματι, αν

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= u(x, 0) = \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R} \\ f(x) &:= u(x, t) = \cos(kx - \omega t), \quad x \in \mathbb{R}, t = \text{σταθερό}. \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$f(x) = \cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) = \phi\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) \quad (4.13)$$

οπότε αν

$$\begin{aligned} M(a, b) \in C_f &\Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = \phi\left(a - \frac{\omega}{k}t\right) \\ N\left(a - \frac{\omega}{k}t, b\right) &\in C_f. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$a - \frac{\omega}{k}t = a' \Leftrightarrow a = a' + \frac{\omega}{k}t \quad (4.14)$$

οπότε από τα παραπάνω έχουμε την ισοδυναμία

$$N(a', b) \in C_f \Leftrightarrow M\left(a' + \frac{\omega}{k}t, b\right) \in C_f.$$

Παρατηρώντας, τις συντεταγμένες των M, N συμπεραίνουμε ότι το M προκύπτει από το N με παράλληλη προς τον $x'x$ μετατόπιση προς τα «δεξιά» κατά $\frac{\omega}{k}t$ διάστημα. Επομένως, η C_f είναι μια παράλληλη προς τον $x'x$ μετατόπιση προς τα δεξιά της C_f κατά $\frac{\omega}{k}t$, που σε όρους φυσικής έχουμε ότι η u παριστάνει ένα εξερχόμενο κύμα, με αρχικό προφίλ την $u(x, 0)$. Επειδή δε το κύμα σε χρόνο $t > 0$ έχει μετακινηθεί κατά $\frac{\omega}{k}t$ συμπεραίνουμε ότι η φασική ταχύτητα του είναι $\frac{\omega}{k}$. Για την παραπάνω $u(x, t) = \cos(kx - \omega t)$ παρατηρούμε τέλος ότι

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(kx - \omega t) \\ &= \operatorname{Re}[e^{i(kx - \omega t)}] \\ &= \operatorname{Re}[e^{ikx} e^{-i\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[u(x) e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

γεγονός που δείχνει ότι η μιγαδική αναπαράσταση ενός εξερχόμενου χρονο-αρμονικού κύματος περιέχει τον παράγοντα $e^{-i\omega t}$.

4.1.4 Μιγαδική αναπαράσταση πεδίων με μεταβαλλόμενο πλάτος

Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι η μιγαδική αναπαράσταση της χρονο-αρμονικής βαθμωτής πραγματικής συνάρτησης

$$f(r, t) = a(r)\cos(\omega t + \phi), r \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

όπου $a(r)$ πραγματική μη μηδενική συνάρτηση, $\omega > 0$ και $\phi \in \mathbb{R}$ είναι η:

$$f(r, t) = \operatorname{Re}[f e^{-i\omega t}] \quad (4.16)$$

όπου f μιγαδική συνάρτηση μονοσήμαντα ορισμένος που δίνεται από την $f(r) = a(r)e^{-i\phi}$. Όμοια, η μιγαδική αναπαράσταση της χρονο-αρμονικής διανυσματικής πραγματικής συνάρτησης

$$\mathcal{F}(r, t) = A_1(r)\cos(\omega + \phi_1)\hat{i} + A_2(r)\cos(\omega + \phi_2)\hat{j} + A_3(r)\cos(\omega + \phi_3)\hat{k}$$

όπου $A_k(r), k = 1, 2, 3, \dots$ πραγματικές συναρτήσεις, $\omega > 0, \phi_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3, \dots$ είναι η

$$\mathcal{F}(r, t) = \operatorname{Re}[F(r)e^{-i\omega t}] \quad (4.17)$$

όπου $F(r)$ μονοσήμαντα ορισμένη μιγαδική συνάρτηση που δίνεται από την ισότητα

$$F(r) = A_1(r)e^{-i\phi_1}\hat{i} + A_2(r)e^{-i\phi_2}\hat{j} + A_3(r)e^{-i\phi_3}\hat{k}.$$

Η μοναδικότητα του φάσρα $f(r)$ στην (4.16) και του $F(r)$ στην (4.17) αποδεικνύεται όπως νωρίτερα.

4.1.5 Χρονικές παράγωγοι πεδίων με μιγαδική αναπαράσταση

Χρήσιμοι στην εύρεση της μιγαδικής αναπαράστασης μιας ισότητας που περιέχει χρονο-αρμονικά βαθμωτά ή διανυσματικά πεδία είναι οι επόμενοι τύποι

ι) Αν $f(r, t) = \operatorname{Re}[f(r)e^{-i\omega t}]$ τότε

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} f(r, t) &= \operatorname{Re}[f(r)e^{-i\omega t}(-i\omega)] \\ - \frac{\partial}{\partial x} f(r, t) &= \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} f(r)\right)e^{-i\omega t}\right] \\ - \operatorname{grad} f(r, t) &= \operatorname{Re}[(\operatorname{grad} f(r))e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

υ) Αν $\mathcal{F}(r, t) = \operatorname{Re}[F(r)e^{-i\omega t}]$ τότε

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \mathcal{F}(r, t) &= \operatorname{Re}[F(r)e^{-i\omega t}(-i\omega)] \\ - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(r, t) &= \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} F(r)\right)e^{-i\omega t}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \operatorname{div} \mathcal{F}(r, t) &= \operatorname{Re}[(\operatorname{div} F(r))e^{-i\omega t}] \\ - \operatorname{curl} \mathcal{F}(r, t) &= \operatorname{Re}[(\operatorname{curl} F(r))e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

Σε όλους τους παραπάνω τύπους $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Η δικαιόλογηση των παραπάνω τύπων στηρίζεται στην $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, οπότε η κάθε είδους παραγωγήσις, εξ' αιτίας της γραμμικότητας της, μεταφέρεται στους z και \bar{z} . Οι χωρικές παραγωγίσεις δρουν στο χωρικό τμήμα των z και \bar{z} και οι χρονικές στο χρονικό, δηλαδή το $e^{-i\omega t}$.

4.1.6 Αρμονική αναπαράσταση εξισώσεων Maxwell

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού στο πεδίο του χρόνου είναι, όπως έχουμε δει και νωρίτερα, οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D(x, t) &= \operatorname{curl} H(x, t) - J(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} B(x, t) &= -\operatorname{curl} E(x, t) \\ \operatorname{div} D(x, t) &= \rho(x, t) \\ \operatorname{div} B(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

και ως πεδία παίρνουν πραγματικές τιμές.

Οι παραπάνω τέσσερις εξισώσεις αποτελούν μαθηματικές εκφράσεις πειραματικών νόμων. Υποθέτουμε ότι τα πεδία $E(x, t)$, $H(x, t)$, $D(x, t)$, $B(x, t)$ και η πηγή $\rho(x, t)$ μεταβάλλονται χρονο-αρμονικά με κοινή κυκλική συχνότητα $\omega > 0$. Τότε υπάρχουν, μονοσήμαντα ορισμένα χρονο-ανεξάρτητα $E(x)$, $H(x)$, $D(x)$, $B(x)$ και πηγή $\rho(x)$ ώστε να ισχύουν

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \operatorname{Re}[E(x)e^{-i\omega t}], H(x, t) = \operatorname{Re}[H(x)e^{-i\omega t}] \\ D(x, t) &= \operatorname{Re}[D(x)e^{-i\omega t}], B(x, t) = \operatorname{Re}[B(x)e^{-i\omega t}] \\ J(x, t) &= \operatorname{Re}[J(x)e^{-i\omega t}] \text{ και } \rho(x, t) = \operatorname{Re}[\rho(x)e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των $D(x, t)$, $H(x, t)$ και $J(x, t)$ στον νόμο του Ampère έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[D(x)e^{-i\omega t}] = \operatorname{curl} \operatorname{Re}[H(x)e^{-i\omega t}] - \operatorname{Re}[J(x)e^{-i\omega t}]$$

η οποία με την βοήθεια των προαναφερθέντων τύπων γράφεται

$$\operatorname{Re}[-i\omega D(x)e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re}[(\operatorname{curl} H(x) - J(x))e^{-i\omega t}]$$

από την οποία σύμφωνα με το διανυσματικό ανάλογο της, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} -i\omega D(x) &= \operatorname{curl} H(r) - J(r) \\ \operatorname{curl} H(r) &= -i\omega D(x) + J(x) \end{aligned}$$

που είναι η μιγαδική αναπαράσταση του νόμου του Ampère για χρονο-αρμονικά πεδία.

Με ανάλογη διαδικασία βρίσκουμε τις μιγαδικές αναπαραστάσεις των υπολοίπων νόμων των εξισώσεων Maxwell, που είναι αντίστοιχα οι εξής:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} E(x) &= i\omega B(x) \\ \operatorname{div} D(x) &= \rho(x) \\ \operatorname{div} B(x) &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Διατύπωση

Θα ξεκινήσουμε με τις χρονικά αρμονικές εξισώσεις Maxwell, χωρίς πηγές. Θεωρούμε την χρονική σύμβαση $e^{-i\omega t}$.

$$i\omega D = -\operatorname{curl} H, \quad (4.18)$$

$$i\omega B = \operatorname{curl} E. \quad (4.19)$$

Τα πεδία παίρνουν τιμές στον \mathbb{C}^3 και είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής $r \in \Omega$ και της γωνιακής συχνότητας $\omega > 0$. Το χωρίο Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον \mathbb{R}^3 , και ω είναι γενικά ένας μιγαδικός αριθμός, που αναπαριστά την γωνιακή συχνότητα. Η εξίσωση (4.18) είναι ο νόμος του Ampère και (4.19) είναι ο νόμος του Faraday.

Οι εξισώσεις Maxwell είναι εφοδιασμένες με τους δύο νόμους του Gauss

$$\operatorname{div} D = 0, \quad (4.20)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (4.21)$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία D , B άμεσα ικανοποιούν τις (4.20), (4.21) όταν τα D , B , E , H ικανοποιούν τους (4.18), (4.19) για $\omega \neq 0$.

Υποθέτουμε ότι το χωρίο Ω αποτελείται από ένα διανισοτροπικό υλικό. Τα υλικά αυτά είναι οπτικά ενεργά με την έννοια ότι μπορούν να συστρέψουν την πόλωση του φωτός είτε σε διάθλαση είτε σε μετάδοση. Αυτό είναι συνέπεια ότι το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο είναι συζευγμένα. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζουμε την πιο γενική περίπτωση ενός γραμμικού μέσου όπου οι καταστατικές εξισώσεις [44] είναι

$$D = \epsilon E + \xi H, \quad (4.22)$$

$$B = \zeta E + \mu H. \quad (4.23)$$

Οι παράμετροι ϵ , ξ , ζ και μ , οι οποίες χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του υλικού, είναι 3×3 πίνακες, οι οποίοι έχουν ως στοιχεία μιγαδικές συναρτήσεις r και ω .

Με τον 6-διανυσματικό συμβολισμό, το πρόβλημα (4.1), (4.2), (4.5) και (4.6) διατυπώνεται ως εξής:

$$i\omega \begin{bmatrix} \epsilon & \xi \\ \zeta & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{curl} \\ \text{curl} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου το ω δρά ως η ιδιοτιμή και $(E, H)^T$ ως το ιδιοδιάνυσμα. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας στο αριστερό μέλος εξαρτάται από την ιδιοτιμή ω .

Προκειμένου να γίνουμε πιο σαφείς, ας συμβολίσουμε με $e := (E, H)^T$ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (EM), με

$$A = A(\omega) := \begin{bmatrix} \epsilon & \xi \\ \zeta & \mu \end{bmatrix},$$

τον πίνακα υλικού και με

$$\Omega := i \begin{bmatrix} 0 & \text{curl} \\ -\text{curl} & 0 \end{bmatrix} = iM$$

τον τυπικό τελεστή Maxwell. Με τον συμβολισμό αυτό, το τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών γράφεται

$$\Omega e = \omega A(\omega)e. \quad (4.25)$$

4.3 Το μαθηματικό πρόβλημα

Θα διατυπώσουμε τώρα το (4.25) στο κατάλληλο χώρο Hilbert. Εστιάζουμε στην περίπτωση της κοιλότητας, και πιο συγκεκριμένα,

Υπόθεση 2. Ω είναι ένα φραγμένο Lipschitz χωρίο στον \mathbb{R}^3 .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύνορο $\Gamma := \partial\Omega$ είναι τέλεια συνεκτικό,

Υπόθεση 3. $\hat{n} \times E = 0$ στο Γ .

Ας επισημάνουμε επίσης ότι η παραπάνω υπόθεση υποδηλώνει ότι,

$$\hat{n} \cdot H = 0 \text{ στο } \Gamma. \quad (4.26)$$

Εργαζόμαστε στον χώρο $\mathcal{X} := L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ με το φυσιολογικό εσωτερικό γινόμενο. Ο τελεστής curl θεωρείται με την ασθενή έννοια, και με την ίδια έννοια, ο Ω γίνεται αντιληπτός ως ένας μεγιστικά ορισμένος πίνακας τελεστής. Επίσης, το πεδίο ορισμού του Ω είναι

$$D(\Omega) := H_0(\text{curl}; \Omega) \times H(\text{curl}; \Omega).$$

Πρόταση 4.2. *Ο \mathcal{Q} είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής.*

Υπόθεση 4. *Τα στοιχεία ϵ , ξ , ζ και μ είναι $L^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις (με μεταβλητή το r).*

Πόρισμα 1. *Ο A ορίζει έναν φραγμένο πολλαπλασιαστικό τελεστή στον \mathcal{X} .*

Πρόταση 4.3. *$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ με συμπαγή εμφύτευση.*

Σαν συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος, το φάσμα του \mathcal{Q} είναι διακριτό και αποτελείται από μια ακολουθία ιδιοτιμών χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης. Μάλιστα, οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του \mathcal{Q} , δηλαδή οι ιδιοσυχνότητες της κενής κοιλότητας, εμφανίζονται σαν μια δίπλευρη ακολουθία $(\omega_n^0)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ όπου $(\omega_n^0)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών, οπότε συγκλίνει στο άπειρο, και $\omega_{-n}^0 = -\omega_n^0$. Κάθε ω_n^0 , $n \neq 0$, έχει μετρηθεί τόσες φορές όσες και η πολλαπλότητά του. Το $\omega_0^0 := 0$ είναι πάντα μια ιδιοτιμή αλλά χρειάζεται ειδική μεταχείριση, αφού ο πυρήνας $\ker \mathcal{Q}$ είναι άπειρης διάστασης. Παρόλα αυτά, ελεύθερα απόκλισης πεδία στον $\ker \mathcal{Q}$ εξακολουθούν να παράγουν πεπερασμένης διάστασης χώρο, ο οποίος περιγράφει το (EM) στατικό πεδίο στο Ω . Για λεπτομερή παρουσίαση, αναφερόμαστε στο [15] και [17].

Ας επικεντρωθούμε τώρα στα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, [1], [15] ή [22] για μια λεπτομερή παρουσίαση. Σε κάθε ω_n^0 , $n = 1, 2, \dots$, υπάρχει ένα αντίστοιχο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{e}_n := (E_n, H_n)^T$, το οποίο παίρνουμε λύνοντας ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για την (μείον) Λαπλασιανή. Στην πραγματικότητα, έχουμε δύο ισοδύναμες μορφές του προαναφερθέντος προβλήματος, τις ακόλουθες:

- $-\nabla^2 E_n = (\omega_n^0)^2 E_n$ στον Ω , $\operatorname{div} E_n = 0$ στον Ω , $\hat{n} \times E_n = 0$ στο Γ και $H_n := \frac{i}{\omega_n^0} \operatorname{curl} E_n$.
- $-\nabla^2 H_n = (\omega_n^0)^2 H_n$ στον Ω , $\operatorname{div} H_n = 0$ στον Ω , $\hat{n} \cdot H_n = 0$ στο Γ και $E_n := -\frac{i}{\omega_n^0} \operatorname{curl} H_n$.

Το ιδιοδιάνυσμα για $\omega_{-n}^0 = -\omega_n^0$ δίνεται από $\mathbf{e}_{-n}^0 = (E_n, -H_n)$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα, έτσι $(\mathbf{e}_n^0)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ μπορεί να επιλεγεί ως μια ορθοκανονική ακολουθία.

Εστω τώρα $\mathcal{H} := [\dots, \mathbf{e}_{-n}, \dots, \mathbf{e}_{-2}, \mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots]$, βλέπε την επόμενη παράγραφο για συμβολισμό. Ο περιορισμός του \mathcal{Q} στον \mathcal{H} συμβολίζεται με $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$.

Πρόταση 4.4. *Ο $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον \mathcal{H} και έχει συμπαγή αντίστροφο $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$. Η ακολουθία των ιδιοτιμών του $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ είναι $(\omega_n^0)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι $(\mathbf{e}_n^0)_{n \in \mathbb{Z}^*}$. Η τελευταία είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{H} .*

Τότε η (4.25) περιορίζεται στον \mathcal{H} και γράφεται $e = \omega Q_{\mathcal{H}}^{-1} A(\omega)e$. Έστω $\mathcal{F}(\omega) := \omega Q_{\mathcal{H}}^{-1} A(\omega)$: καταλήγουμε τότε σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για μια δέσμη τελεστών linear pencil

$$(I - \mathcal{F}(\omega))e = 0 \quad (4.27)$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}(\omega)$ είναι ένας συμπαγής τελεστής στον \mathcal{X} , αφού είναι το γινόμενο ενός συμπαγούς και ενός φραγμένου τελεστή. Το πρόβλημα (4.27) μπορούμε να το διαχειριστούμε σύμφωνα με την επόμενη παράγραφο.

4.4 Το γενικό πλαίσιο

Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Για κάθε σύνολο $U \subset X$, συμβολίζουμε με \bar{U} την κλειστότητα, με U^\perp το ορθογώνιο συμπλήρωμα και με $[U]$ τη γραμμική θήκη του U , η κλειστή γραμμική θήκη είναι τότε $\overline{[U]}$. Το σύνολο $B(X)$ είναι η άλγεβρα Banach των φραγμένων τελεστών στον X και $K(X)$ το ιδεώδες των συμπαγών τελεστών. Δεδομένου ότι $T \in B(X)$, συμβολίζουμε με $R(T)$ το σύνολο τιμών και με $\ker T$ τον πυρήνα του T . Με T^* συμβολίζουμε τον συζυγή τελεστή.

Θεωρούμε έναν τόπο (δηλαδή ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο) $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ και μια συνάρτηση με τιμές συναρτήσεις $F : \mathcal{O} \rightarrow B(X)$. Έχουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα [42].

Πρόταση 4.5 (Analytic Fredholm Alternative). Έστω F αναλυτική και $F(\omega) \in K(X)$ για κάθε $\omega \in \mathcal{O}$. Τότε είτε
 α) $I - F(\omega)$ δεν είναι 1-1 για κάθε $\omega \in \mathcal{O}$, ή
 β) $(I - F(\omega))^{-1} \in B(X)$ για κάθε $\omega \in \mathcal{O} \setminus \Sigma$, όπου $\Sigma \subset \mathbb{C}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο χωρίς κανένα οριακό σημείο.

Στην περίπτωση (β), η τελεστο - συνάρτηση $(I - F(\cdot))^{-1}$ είναι αναλυτική στον $\mathcal{O} \setminus \Sigma$, μερόμορφη στον \mathcal{O} και τα υπόλοιπα στους πόλους είναι πεπερασμένης διάστασης τελεστές.

Πρακτικά, το παραπάνω ερμηνεύεται ως εξής : εάν μπορούμε να απαλείψουμε την περίπτωση (α), τότε η εξίσωση $F(\omega)x = x$ έχει μη-μηδενικές λύσεις μόνο για $\omega \in \Sigma$. Οι λύσεις που αντιστοιχούν σε ένα συγκεκριμένο $\omega \in \Sigma$ συνθέτουν έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο.

Ορισμός 4.6. Οι τιμές του Σ λέγονται ιδιοτιμές της δέσμης τελεστών pencil τελεστή $I - F(\cdot)$. Μια μη-μηδενική λύση του $F(\omega)x = x$, $\omega \in \Sigma$, ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο ω και η γραμμική θήκη των ιδιοδιανυσμάτων ονομάζεται ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ω .

Ας επικεντρωθούμε τώρα στην ειδική περίπτωση όπου $F(\omega) := AB(\omega)$, $\omega \in \mathcal{O}$, όπου A είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $B(\omega) \in B(X)$. Το φασματικό θεώρημα [23] εξασφαλίζει ότι ο A μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n^0 \rangle e_n^0, \quad (4.28)$$

όπου (λ_n) είναι η ακολουθία (μη - μηδενικών πραγματικών) ιδιοτιμών του A , σε απόλυτα φθίνουσα σειρά και έχουν μετρηθεί τόσες φορές όσες η αλγεβρική πολλαπλότητά τους, και (e_n^0) είναι η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων. Η τελευταία είναι μια ορθοκανονική βάση για $\overline{R(A)}$. Εδώ υποθέτουμε ότι ο A έχει άπειρες ιδιοτιμές και επομένως $\lambda_n \rightarrow 0$.

Το πρόβλημα $F(\omega)x = x$, δηλαδή $AB(\omega)x = x$, αφού $x \in R(A)$, μπορεί τώρα να γραφτεί ως εξής

$$\sum_n \lambda_n \langle B(\omega)x, e_n^0 \rangle e_n^0 = \sum_n \langle x, e_n^0 \rangle e_n^0,$$

ή, ισοδύναμα, ως

$$\sum_n \lambda_n \left\langle x, \left(B(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* e_n^0 \right\rangle e_n^0 = 0. \quad (4.29)$$

Έστω $f_n = f_n(\omega) := \left(B(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* e_n^0 = \left(B(\omega)^* - \frac{1}{\lambda_n} I \right) e_n^0$. Το αριστερό μέλος του (4.29) είναι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής

$$S = S(\omega) := \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle e_n^0,$$

που αντιστοιχεί στις ακολουθίες $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $(f_n) \subset X$, $(e_n) \subset X$, όπου (λ_n) είναι φραγμένη, (f_n) είναι μια ακολουθία Bessel και (e_n) είναι μια ορθοκανονική βάση, βλέπε [10] για σχετικούς ορισμούς. Προκειμένου να καταλήξουμε ότι το (4.29) επιτρέπει μη - μηδενικές λύσεις είναι ισοδύναμο με το ότι ο S δεν είναι 1-1, με άλλα λόγια, ο αντίστροφος του S δεν υπάρχει. Η αντιστρεψιμότητα των πολλαπλασιαστικών τελεστών μελετάται στο [46].

Πρόταση 4.7. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

a) S είναι 1-1

β) (f_n) είναι μια πλήρης ακολουθία, δηλαδή $\overline{[f_1, f_2, \dots, f_n, \dots]} = X$

γ) $\langle x, f_n \rangle = 0$ για κάθε n , δηλώνει $x = 0$

Πόρισμα 2. Το ω είναι μια ιδιοτιμή του $I - F(\cdot)$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_n(\omega))$ δεν είναι πλήρης. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\ker \Sigma(\omega)$. Επιπλέον, $x \in \ker S(\omega)$ αν και μόνο αν $\langle x, f_n(\omega) \rangle = 0$ για κάθε n και, επομένως,

$$\ker \Sigma(\omega) = [f_1(\omega), f_2(\omega), \dots, f_n(\omega), \dots]^\perp.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα, το οποίο ουσιαστικά είναι να ανακατασκευάσουμε τον τελεστή $B(\cdot)$ όταν γνωρίζουμε τα ιδιοστοιχεία του προβλήματος $F(\omega)x = x$. Στην πραγματικότητα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ιδιοτιμή ω και τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $\ker \Sigma(\omega)$. Τότε

$$\ker \Sigma(\omega)^T = \overline{[f_1(\omega), f_2(\omega), \dots, f_n(\omega), \dots]},$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία $(f_n(\omega))$. Η σχέση

$$\langle B(\omega)e_n^0, e_m^0 \rangle = \langle e_n^0, f_m(\omega) \rangle + \frac{\delta_{nm}}{\lambda_n}, \quad (4.30)$$

(όπου δ το δέλτα του Kronecker) επιτρέπει την ανακατασκευή του τελεστή $B(\omega)$.

4.5 Ιδιοσυχνότητες και τρόποι (modes) της διανισοτροπικής κοιλότητας

Τώρα επιστρέφουμε στο πρόβλημα (4.27). Προκειμένου να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, θα πρέπει να κάνουμε μια επιπλέον υπόθεση

Υπόθεση 5. Η A είναι μια αναλυτική συνάρτηση $\mathcal{O} \ni \omega \mapsto A(\omega) \in B(\mathcal{X})$, όπου \mathcal{O} είναι ένα χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο, τέτοιο ώστε $0 \in \mathcal{O}$.

Η παραπάνω υπόθεση είναι μια απολύτως δικαιολογημένη υπόθεση, αφού $A(\omega)$ συνήθως προκύπτει από ένα μετασχηματισμό Fourier. Επομένως, ο \mathcal{F} ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $\mathcal{O} \ni \omega \mapsto \mathcal{F}(\omega) \in K(\mathcal{X})$. Επιπλέον, για $\omega_0 = 0$, $\mathcal{F}(\omega_0) = 0$ και συνεπώς ο $I - \mathcal{F}(\omega_0)$ είναι αντιστρέψιμος. Το θεώρημα Fredholm τότε δίνει

Πρόταση 4.8. Η δέσμη τελεστών (operator pencil) $I - \mathcal{F}(\cdot)$ έχει μετρήσιμα πολλές ιδιοτιμές με πεπερασμένης διάστασης αντίστοιχους ιδιόχωρους. Αυτές συνθέτουν μια ακολουθία (ω_n) μη - μηδενικών μιγαδικών αριθμών, που συγκλίνει στο άπειρο.

Κάθε ω_n ονομάζεται ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας, και από φυσικής απόψεως, παρέχει μια γωνιακή συχνότητα όπου η διάδοση μέσα στην κοιλότητα

είναι εφικτή. Το παραπάνω αποτέλεσμα αποκαλύπτει ότι υπάρχουν τέτοιες συχνότητες και είναι μετρήσιμα πολλές. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοσυχνότητα ω_n ονομάζονται modes. Επισημαίνουμε, ξανά, ότι modes μιας μη - μηδενικής ιδιοσυχνότητας ικανοποιούν τις (4.20), (4.21), αλλά, ξανά, αντίθετα με τα modes που αντιστοιχούν στην στατική περίπτωση $\omega_0 = 0$ όπου γενικά δεν ικανοποιούνται· η περίπτωση αυτή χρήζει ειδικής μεταχείρισης.

Έστω τώρα $\mathcal{A} := \Omega_{\mathcal{H}}^{-1}$, $\mathbf{B}(\omega) := \omega \mathcal{A}(\omega)$. Οι ιδιοτιμές του \mathcal{A} υπολογίζονται ως εξής

$$\lambda_n := \frac{1}{\omega_n^0}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

και η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι ξανά η (\mathbf{e}_n) . Επομένως, έχουμε την ανάπτυξη

$$\mathcal{A}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \langle x, \mathbf{e}_n^0 \rangle \mathbf{e}_n^0.$$

Τώρα $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{A}\mathbf{B}(\omega)$ και το πρόβλημα της δέσμης τελεστών (4.27) αναδιατυπώνεται με στόχο τον πολλαπλασιαστικό τελεστή

$$\mathcal{S}x = \mathcal{S}(\omega)x := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \langle x, \mathbf{f}_n \rangle \mathbf{e}_n^0,$$

όπου

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n(\omega) := \left(\mathbf{B}(\omega) - \frac{1}{\lambda_n} I \right)^* \mathbf{e}_n^0 = (\bar{\omega} A(\omega)^* - \omega_n^0 I) \mathbf{e}_n^0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Πρόταση 4.9. *Η $\omega \neq 0$ είναι μια ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας αν και μόνο αν ο $\mathcal{S}(\omega)$ δεν είναι 1-1 τελεστής, αν και μόνο αν $(\mathbf{f}_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}^*}$ δεν είναι πλήρης. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος των modes είναι πεπερασμένης διάστασης και δίνεται από*

$$\ker \mathcal{S}(\omega) = [\dots, \mathbf{f}_{-n}(\omega), \dots, \mathbf{f}_{-2}(\omega), \mathbf{f}_{-1}(\omega), \mathbf{f}_1(\omega), \mathbf{f}_2(\omega), \dots, \mathbf{f}_n(\omega), \dots]^{\perp}.$$

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$\langle A(\omega) \mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_m^0 \rangle = \omega_n^0 \langle \mathbf{e}_n^0, \mathbf{f}_m(\omega) \rangle + \delta_{nm},$$

από την οποία μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τον πίνακα υλικού.

4.6 Συμπέρασμα

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται την αυστηρή μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ιδιοτιμών για την αγωγήμη διανιστροπική κοιλότητα. Πιο συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι υπο κατάλληλες και απλές υποθέσεις σχετικά με τον

4.6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

πίνακα υλικού, η κοιλότητα έχει άπειρα μετρήσιμο αριθμό μη-μηδενικών ιδιοσυχνοτήτων χωρίς κανένα σημείο συσσώρευσης. Για κάθε ιδιοσυχνότητα, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός αντίστοιχων modes για τα οποία παρουσιάζουμε ένα χαρακτηρισμό χρησιμοποιώντας τα ιδιοστοιχεία της κενής κοιλότητας.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Στοιχεία από τη θεωρία των χώρων Sobolev

5.1.1 Μια γενική κατασκευή

Οι χώροι Sobolev [18] αποτελούν το πλέον κατάλληλο συναρτησιακό πλαίσιο μελέτης προβλημάτων συνοριακών τιμών. Εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με χώρους Sobolev που βασίζονται στον L^2 , αναφέροντας χρήσιμα για τα επόμενα στοιχεία.

Το επόμενο γενικό θεώρημα [45] δίνει έναν τρόπο δημιουργίας χώρου Sobolev. Τα απαραίτητα συστατικά είναι:

- ο χώρος των κατανομών $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$
- δύο χώροι Hilbert \mathcal{H} και \mathcal{Z} με $\mathcal{Z} \hookrightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, (αν $v_n \rightarrow v$ στον \mathcal{Z} συνεπάγεται ότι $v_n \rightarrow v$ στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$)
- ένας γραμμικός συνεχής τελεστής $L : \mathcal{H} \mapsto D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 5.1. Ορίζουμε

$$\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{H} : Lv \in \mathcal{Z}\}$$

και

$$(u, v)_{\mathcal{W}} = (u, v)_{\mathcal{H}} + (Lu, Lv)_{\mathcal{Z}} \quad (5.1)$$

τότε

- ο \mathcal{W} είναι ένας χώρος Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται με την (5.1)
- η εμφύτευση του \mathcal{W} στον \mathcal{H} είναι συνεχής και

- $L|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{Z}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχεται ότι το $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$ που ορίζεται με την (5.1) είναι ένα εσωτερικό γινόμενο με επαγόμενη νόρμα

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \sqrt{\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|Lu\|_{\mathcal{Z}}^2}. \quad (5.2)$$

Επομένως, το $(\mathcal{W}, (\cdot)_{\mathcal{W}})$ είναι χώρος γινομένου. Απομένει να αποδείξουμε την πληρότητα. Έστω (u_n) μια $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ ακολουθία Cauchy, στοιχείων του \mathcal{W} και ένα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}} < \epsilon, \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \quad (5.3)$$

Από (5.2) και (5.3) βρίσκουμε ότι και

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}} < \epsilon \text{ και } \|Lu_n - Lu_m\|_{\mathcal{Z}} < \epsilon \text{ για κάθε } n, m \geq n_0$$

από τις οποίες προκύπτει ότι οι ακολουθίες (u_n) και (Lu_n) είναι Cauchy στους χώρους Hilbert \mathcal{H} και \mathcal{Z} αντίστοιχα, από την πληρότητα των οποίων συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $u \in \mathcal{H}$ και $v \in \mathcal{Z}$:

$$u_n \rightarrow u \text{ στον } \mathcal{H} \text{ και } Lu_n \rightarrow v \text{ στον } \mathcal{Z}.$$

Από την $u_n \rightarrow u$ στον \mathcal{H} και τη συνέχεια του $L \Rightarrow Lu_n \rightarrow Lu$ στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Από την $Lu_n \rightarrow v$ στον \mathcal{Z} και την $\mathcal{Z} \hookrightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow Lu_n \rightarrow v, D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Τότε από την μοναδικότητα του ορίου στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ συμπεραίνουμε ότι $v = Lu$, οπότε $Lu \in \mathcal{Z}$ και η $Lu_n \rightarrow v$ στον \mathcal{Z} μετατρέπεται στην $Lu_n \rightarrow Lu$ στον \mathcal{Z} . Έτσι έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει $u \in \mathcal{H} : Lu \in \mathcal{Z}$ και $\|u_n - u\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \|Lu_n - Lu\|_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0$ οπότε σύμφωνα με την (5.2) έχουμε

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}}^2 = \|u_n - u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|L(u_n - u)\|_{\mathcal{Z}}^2 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι $u_n \rightarrow u$ στον \mathcal{W} , που είναι το ζητούμενο.

- Από την (5.1) έχουμε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ και από την (5.2) $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \|u\|_{\mathcal{W}}$ από τα οποία συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$.
- Από την (5.2) συμπεραίνουμε ότι $\|Lu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|u\|_{\mathcal{W}}$ από την οποία σε συνδυασμό με την γραμμικότητα του L έχουμε τη συνέχεια του L στον \mathcal{W} . Πράγματι, έστω $(u_n), u \in \mathcal{W} : u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{W}}} u$ τότε $\|Lu_n - Lu\|_{\mathcal{Z}} = \|L(u_n - u)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|u_n - u\|_{\mathcal{W}} \rightarrow 0$ αφού $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{W}}} u$. Άρα, $Lu_n \rightarrow Lu$ στον \mathcal{Z} . \square

5.1.2 Εφαρμογές

Για την παρουσίαση των εφαρμογών του παραπάνω θεωρήματος, θεωρούμε γνωστά τα επόμενα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 5.2. Ο χώρος $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ εμφυτεύεται συνεχώς στο χώρο των κατανομών $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$.

Θεώρημα 5.3. Αν $u_n \rightarrow u$, στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ τότε $D^a u_n \rightarrow D^a u$, στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ για κάθε πολυδείκτη a , (δηλαδή όλες οι παράγωγοι D^a στο χώρο των κατανομών είναι συνεχείς.)

1^η Εφαρμογή: Ο χώρος $\mathcal{H}^1(\Omega)$

Έστω Ω φραγμένος τόπος του \mathbb{R}^n , οι χώροι Hilbert

$$\mathcal{H} := L^2(\Omega; \mathbb{R}) = L^2(\Omega)$$

$$\mathcal{Z} := L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = (L^2(\Omega))^n \hookrightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

και ο γραμμικός τελεστής

$$L := \nabla : L^2(\Omega) \rightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

ο οποίος, σύμφωνα με το (5.3) είναι και συνεχής. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα (5.1), έχουμε ότι

- ο χώρος $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{H} : Lu \in \mathcal{Z}\} = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^n\} = \mathcal{H}^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert
- $\mathcal{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
- ο τελεστής $\nabla : \mathcal{H}^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)^n$ είναι συνεχής.

2^η Εφαρμογή: Ο χώρος $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$

Θεωρούμε τους χώρους Hilbert

$$\mathcal{H} := (L^2(\Omega))^n, \quad \mathcal{Z} := L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

και το γραμμικό τελεστή

$$L := \text{div} : (L^2(\Omega))^n \mapsto D'(\Omega)$$

ο οποίος είναι και συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα (5.1), έχουμε:

- ο χώρος $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{H} : Lu \in \mathcal{Z}\} = \{u \in (L^2(\Omega))^n : \text{div} u \in L^2(\Omega)\} = \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ είναι χώρος Hilbert
- $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^n$
- ο τελεστής $\text{div} : \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ είναι συνεχής.

3^η Εφαρμογή: Ο χώρος $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$
 Θεωρούμε τους χώρους Hilbert

$$\mathcal{H} := (L^2(\Omega))^3, \quad \mathcal{Z} := (L^2(\Omega))^3 \hookrightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

και το γραμμικό τελεστή

$$L := \text{curl} : (L^2(\Omega))^3 \mapsto D'(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

ο οποίος, σύμφωνα με το (5.3) είναι και συνεχής. Πράγματι, έστω $u_n, u \in (L^2(\Omega))^3 : u_n \rightarrow u$ στον $(L^2(\Omega))^3$ και επειδή $(L^2(\Omega))^3 \hookrightarrow D'(\Omega; \mathbb{R}^3)$ έχουμε $u_n \rightarrow u$ στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^3)$ οπότε από το (5.3) συνεπάγεται $\text{curl } u_n \rightarrow \text{curl } u$, στον $D'(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Τότε από το θεώρημα (5.1) έχουμε

- ο χώρος $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{H} : Lu \in \mathcal{Z}\} = \{u \in (L^2(\Omega))^3 : \text{curl } u \in (L^2(\Omega))^3\} = \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$ είναι χώρος Hilbert.
- $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$
- ο τελεστής $\text{curl} : \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mapsto (L^2(\Omega))^3$ είναι συνεχής.

5.1.3 Ανακεφαλαίωση

- Οι χώροι

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^n\} \\ \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) &= \{u \in (L^2(\Omega))^n : \text{div } u \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) &= \{u \in ((L^2))^3 : \text{curl } u \in (L^2(\Omega))^3\} \end{aligned}$$

είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^n} \\ (u, v)_{\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)} &= (u, v)_{(L^2(\Omega))^n} + (\text{div } u, \text{div } v)_{L^2(\Omega)} \\ (u, v)_{\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)} &= (u, v)_{(L^2(\Omega))^3} + (\text{curl } u, \text{curl } v)_{(L^2(\Omega))^3} \end{aligned}$$

αντίστοιχα.

- $\mathcal{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^n$ και $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$.
- Οι τελεστές

$$\begin{aligned} \text{grad} : \mathcal{H}^1(\Omega) &\mapsto L^2(\Omega)^n \\ \text{div} : \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) &\mapsto L^2(\Omega) \\ \text{curl} : \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) &\mapsto (L^2(\Omega))^3 \end{aligned}$$

είναι συνεχείς ως προς τις νόρμες που επάγονται από τα εσωτερικά γινόμενα των $\mathcal{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$, $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$ που ορίστηκαν παραπάνω και ως προς τις συνήθεις νόρμες των χώρων L^2 .

5.2 Ο υπόχωρος $H_0^1(\Omega)$ του $H^1(\Omega)$

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο χώρος

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)^3\}$$

είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με εσωτερικό γινόμενο το

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^3} \\ &= \int_{\Omega} u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

και χώρος Hilbert ως προς την επαγόμενη νόρμα

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}^2. \quad (5.5)$$

Επίσης, ο $H^1(\Omega)$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $L^2(\Omega)$ και ο τελεστής $\nabla : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)^3$ είναι συνεχής.

Ορισμός 5.4. Συμβολίζουμε με $H_0^1(\Omega)$ την (τοπολογική) θήκη του $D(\Omega)$ στον $H^1(\Omega)$ δηλαδή

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (5.6)$$

Υπενθυμίζεται ότι με $D(\Omega)$ συμβολίζουμε τον χώρο $C_0^\infty(\Omega)$, όταν αυτός εφοδιαστεί με την εξής σύγκλιση: έστω $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ και $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Λέμε ότι

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ στον } C_0^\infty, n \rightarrow \infty$$

όταν

- $D^a \phi_n \rightarrow D^a \phi$ ομοιόμορφα στο Ω , για κάθε $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
- υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subset \Omega$ που περιέχει τον φορέα κάθε ϕ_n , $\text{supp} \phi_n \subseteq K$.

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} u \in H_0^1(\Omega) &\leftrightarrow \text{υπάρχει ακολουθία } \{\phi_n\} \subset D(\Omega) : \phi_n \rightarrow u \text{ στον } H^1(\Omega) \\ &\leftrightarrow \text{υπάρχει ακολουθία } \{\phi_n\} \subset D(\Omega) : \|\phi_n - u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \\ &\text{και } \|\nabla \phi_n - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Επειδή οι συναρτήσεις δοκιμής του $D(\Omega)$ έχουν μηδενικό ίχνος επί του $\partial\Omega$, κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ κληρονομεί αυτήν την ιδιότητα και επομένως τα στοιχεία του $H_0^1(\Omega)$ είναι στοιχεία του $H^1(\Omega)$ με μηδενικό ίχνος στο $\partial\Omega$ δηλαδή

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0|_{\partial\Omega}\}. \quad (5.7)$$

5.2. Ο ΥΠΟΧΩΡΟΣ $H_0^1(\Omega)$ ΤΟΥ $H^1(\Omega)$

Ο $H^1(\Omega)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου $H^1(\Omega, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ και επειδή ο $H^1(\Omega)$ είναι Hilbert συμπεραίνουμε ότι και ο $H_0^1(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert, υπόχωρος του $H^1(\Omega)$.

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα [45] των στοιχείων του $H_0^1(\Omega)$ εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 5.5. Έστω Ω ένας φραγμένος τόπος του \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά c_p (σταθερά Poincaré) τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } u \in H_0^1(\Omega). \quad (5.8)$$

Η ανισότητα (5.8) συνεπάγεται ότι στον $H_0^1(\Omega)$ η νόρμα $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη προς την $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

και από την (5.8) έχουμε

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{c_p^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \sqrt{c_p^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

και επειδή από τον ορισμό του $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ προφανώς

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{c_p^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.9)$$

για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$, η οποία σημαίνει ότι στον H_0^1 οι νόρμες $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ και $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ είναι ισοδύναμες. Συνήθως, εξυπηρετεί να θεωρούμε στον $H_0^1(\Omega)$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \text{ και } \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.10)$$

ως εσωτερικό γινόμενο και νόρμα αντιστοίχως. \square

Σχόλιο: Να τονίσουμε [17] ότι ο χώρος $D(\Omega)$ των συναρτήσεων δοκιμής είναι πυκνός (από τον ορισμό) και συνεχώς εμφυτευόμενος στον $H^1(\Omega)$ δηλαδή $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ και $D(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$.

Ο δυϊκός του $H_0^1(\Omega)$

Στις εφαρμογές του Lax-Milgram σε προβλήματα συνοριακών τιμών ο δυϊκός χώρος του H_0^1 παίζει ένα σημαντικό ρόλο.

Ορισμός 5.6. Ο δυϊκός του $H_0^1(\Omega)$ δηλαδή το σύνολο των γραμμικών και συνεχών συναρτησιακών $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ συμβολίζεται με $H^{-1}(\Omega)$ και η νόρμα ορίζεται από την

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{|Fv| : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}. \quad (5.11)$$

Έστω ένα $F \in H^{-1}(\Omega)$. Επειδή $\overline{D(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$ και $D(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ το συναρτησιακό $F : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ επειδή είναι και συνεχές μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό $F : D(\Omega) \mapsto \mathbb{C}$ οπότε από τον ορισμό της κατανομής προκύπτει ότι η F είναι μια κατανομή και επομένως ο $H^{-1}(\Omega)$ είναι ένας χώρος κατανομών, δηλαδή ο $H^{-1}(\Omega)$ είναι ένας υπόχωρος του χώρου $D'(\Omega)$ των κατανομών και έτσι γράφουμε

$$H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega). \quad (5.12)$$

Το επόμενο θεώρημα [43] δίνει τη μορφή των στοιχείων του χώρου $H^{-1}(\Omega)$.

Θεώρημα 5.7. Ο χώρος $H^{-1}(\Omega)$ είναι το σύνολο των κατανομών F της μορφής

$$F = f_0 + \operatorname{div} f$$

όπου $f_0 \in L^2(\Omega)$ και $f = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Επιπλέον,

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq (1 + c_p)\{\|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)^n}\} \quad (5.13)$$

με $c_p > 0$ σταθερά Poincaré.

Σχόλιο: Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι τα στοιχεία του $H^{-1}(\Omega)$ παριστάνονται ως γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων του $L^2(\Omega)$ και των πρώτων παραγών τους (υπό την έννοια των κατανομών). Ειδικότερα, $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

5.3 Οι υπόχωροι $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ και $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ του $H(\operatorname{div}; \Omega)$

Είναι γνωστό ότι ο χώρος

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\} \quad (5.14)$$

είναι χώρος εσωτερικού γινομένου με εσωτερικό γινόμενο το

$$\begin{aligned} (u, v)_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &:= (u, v)_{L^2(\Omega)^3} + (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} u, \operatorname{div} v \, dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.3. ΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ ΚΑΙ $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ ΤΟΥ $H(\operatorname{div}; \Omega)$

και χώρος Hilbert ως προς την επαγόμενη νόρμα

$$\|u\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.16)$$

Επίσης, ο χώρος $H(\operatorname{div}; \Omega)$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $L^2(\Omega)^3$ και ο τελεστής $\operatorname{div} : H(\operatorname{div}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ είναι συνεχής.

Ορισμός 5.8. Συμβολίζουμε με $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ τον πυρήνα $\ker(\operatorname{div})$ του τελεστή $\operatorname{div} : H(\operatorname{div}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ δηλαδή

$$H(\operatorname{div} 0; \Omega) = \{u \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \operatorname{div} u = 0\}. \quad (5.17)$$

Προφανώς, $H(\operatorname{div} 0; \Omega) \neq \emptyset$ και από τη γραμμικότητα του div συμπεραίνουμε ότι ο $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Επίσης, από τη συνέχεια του τελεστή $\operatorname{div} : H(\operatorname{div}; \Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ προκύπτει η κλειστότητα του $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ αφού $H(\operatorname{div} 0; \Omega) = \operatorname{div}^{-1}(\{0\})$. Άρα, ο $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H(\operatorname{div}; \Omega)$, επομένως είναι και αυτός ένας χώρος Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο και νόρμα, το εσωτερικό γινόμενο και την επαγόμενη νόρμα (νόρμα γραφήματος) του $H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Έστω $u \in H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ τότε είναι $\operatorname{div} u = 0$ στο Ω οπότε

$$\begin{aligned} \|u\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + 0 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \\ \|u\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)^3} \end{aligned} \quad (5.18)$$

δηλαδή για τα στοιχεία του $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ η $H(\operatorname{div}; \Omega)$ νόρμα συμπίπτει με την $L^2(\Omega)^3$ νόρμα.

Ορισμός 5.9. Συμβολίζουμε με $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ την τοπολογική θήκη του $D(\Omega)^n$ στον χώρο $H(\operatorname{div}; \Omega)$ δηλαδή

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \overline{D(\Omega)^n}^{H(\operatorname{div}; \Omega)}. \quad (5.19)$$

Το επόμενο θεώρημα [17] εκφράζει ορισμένες ιδιότητες του $H(\operatorname{div}; \Omega)$ και δίνει την δυνατότητα μιας διαφορετικής αναπαράστασης του χώρου $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$. Κατ' αρχήν ο $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ από τον ορισμό του, ως τοπολογική θήκη είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Επίσης, για $n \in \mathbb{N}^*$ θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$D(\overline{\Omega})^n = \{\phi|_{\Omega} : \phi \in D(\mathbb{R}^n)^n\}.$$

Θεώρημα 5.10. Έστω Ω ένα ανοιχτό σύνολο στον \mathbb{R}^n , ($n \in \mathbb{N}^*$) με φραγμένο Lipschitz σύνορο $\Gamma := \partial\Omega$. Τότε:

1. ο χώρος $D(\overline{\Omega})^n$ είναι πυκνός στον $H(\operatorname{div}; \Omega)$

2. η απεικόνιση ίχνους $\gamma_n : v \mapsto v \cdot \hat{n}|_\Gamma$ που ορίζεται επί του $D(\Omega)^n$ επεκτείνεται συνεχώς σε μια συνεχή γραμμική απεικόνιση $\gamma_n : H(\operatorname{div}; \Omega) \xrightarrow{\text{επί}} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$
3. ο πυρήνας $\ker \gamma_n$ αυτής της απεικόνισης γ_n είναι ο χώρος $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ δηλαδή $\ker \gamma_n = H_0(\operatorname{div}; \Omega)$.

Από τον ορισμό του \ker έχουμε ότι $\ker \gamma_n = \{v \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \gamma_n(v) = 0\} = \{v \in H(\operatorname{div}; \Omega) : v \cdot \hat{n}|_\Gamma = 0\}$ οπότε από το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε ότι

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{u \in H(\operatorname{div}; \Omega) : u \cdot \hat{n}|_\Gamma = 0\}. \quad (5.20)$$

Παρατηρήσεις:

- Για κάθε $v \in D(\bar{\Omega})^n$ και $\phi \in D(\bar{\Omega})$ ισχύει, ως γνωστό, ο τύπος του Green

$$(v, \operatorname{grad} \phi) + (\operatorname{div} v, \phi) = \int_\Gamma v \cdot \hat{n} \phi \, ds. \quad (5.21)$$

Από την πυκνότητα του $D(\Omega)$ στον $H^1(\Omega)$ και την πυκνότητα του $D(\bar{\Omega})^n$ στον $H(\operatorname{div}; \Omega)$, προκύπτει ότι ο τύπος (5.21) ισχύει και για $\phi \in H^1(\Omega)$, $v \in H(\operatorname{div}; \Omega)$. Έτσι έχουμε [17] τον «γενικευμένο» τύπο του Green

$$(v, \operatorname{grad} \phi) + (\operatorname{div} v, \phi) = \langle \gamma_n v, \phi|_\Gamma \rangle \quad (5.22)$$

για κάθε $v \in H(\operatorname{div}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$ όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζει τη δυαδικότητα μεταξύ $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ και $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

- Από την (5.22) για $v \in H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ προκύπτει ότι

$$(\operatorname{div} v, \phi) = -(v, \operatorname{grad} \phi) \quad (5.23)$$

για κάθε $\phi \in H^1(\Omega)$.

5.4 Ο υπόχωρος $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ του $H(\operatorname{curl}; \Omega)$

Είναι γνωστό ότι ο χώρος

$$H(\operatorname{curl}; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{curl} u \in L^2(\Omega)^3\} \quad (5.24)$$

είναι χώρος Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H(\operatorname{curl}; \Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)^3} + (\operatorname{curl} u, \operatorname{curl} v)_{L^2(\Omega)^3} \quad (5.25)$$

και επαγόμενη νόρμα

$$\|u\|_{H(\operatorname{curl}; \Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\operatorname{curl} u\|_{L^2(\Omega)^3}^2. \quad (5.26)$$

Επίσης, [17] ο χώρος $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $L^2(\Omega)^3$ και ο τελεστής $\operatorname{curl} : H(\operatorname{curl}; \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^3$ είναι συνεχής.

Ορισμός 5.11. Συμβολίζουμε με $H_0(\text{curl}; \Omega)$ την τοπολογική θήκη του $D(\Omega)^3$ στον χώρο $H(\text{curl}; \Omega)$ δηλαδή

$$H_0(\text{curl}; \Omega) = \overline{D(\Omega)^3}^{H(\text{curl}; \Omega)}. \quad (5.27)$$

Από τον ορισμό του $H_0(\text{curl}; \Omega)$ ως τοπολογικής θήκης προκύπτει ότι το $H_0(\text{curl}; \Omega)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H(\text{curl}; \Omega)$. Επομένως, το $H_0(\text{curl}; \Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert, υπόχωρος του $H(\text{curl}; \Omega)$.

Το επόμενο θεώρημα [17] δίνει τη δυνατότητα μιας διαφορετικής αναπαράστασης του $H_0(\text{curl}; \Omega)$.

Θεώρημα 5.12. Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , με φραγμένο Lipschitz σύνορο Γ . Τότε:

1. ο χώρος $D(\overline{\Omega})^3$ είναι πυκνός στον $H(\text{curl}; \Omega)$
2. η απεικόνιση ίχνους $\gamma_\tau : v \rightarrow v \times \hat{n}|_\Gamma$ ορισμένη επί του $D(\overline{\Omega})^3$ επεκτείνεται συνεχώς σε μια γραμμική και συνεχή απεικόνιση

$$\gamma_\tau : H(\text{curl}; \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

3. ο πυρήνας αυτής της απεικόνισης γ_τ είναι ο χώρος $H_0(\text{curl}; \Omega)$ δηλαδή

$$\ker \gamma_\tau = H_0(\text{curl}; \Omega).$$

Από τον ορισμό του \ker και της γ_τ έχουμε

$$\begin{aligned} \ker \gamma_\tau &= \{u \in H(\text{curl}; \Omega) : \gamma_\tau(u) = 0\} \\ &= \{u \in H(\text{curl}; \Omega) : u \times \hat{n}|_\Gamma = 0\} \end{aligned}$$

οπότε από το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε

$$H_0(\text{curl}; \Omega) = \{u \in H(\text{curl}; \Omega) : u \times \hat{n}|_\Gamma = 0\}. \quad (5.28)$$

Παρατηρήσεις:

- Για κάθε v και $\phi \in D(\overline{\Omega})^3$ ισχύει ο τύπος του Green

$$(v, \text{curl } \phi) - (\text{curl } v, \phi) = \int_\Gamma v \times \hat{n} \cdot \phi \, ds. \quad (5.29)$$

Από την πυκνότητα του $D(\overline{\Omega})^3$ στους χώρους $H^1(\Omega)^3$ και $H(\text{curl}; \Omega)$ συμπεραίνουμε ότι ο τύπος (5.29) ισχύει για κάθε $v \in H(\text{curl}; \Omega)$ και $\phi \in H^1(\Omega)^3$. Έτσι έχουμε [17] ένα «γενικευμένο» τύπο του Green

$$(v, \text{curl } \phi) - (\text{curl } v, \phi) = \langle \gamma_\tau v, \phi|_\Gamma \rangle \quad (5.30)$$

για κάθε $v \in H(\text{curl}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)^3$ όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζει την δυαδικότητα μεταξύ των $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^3$ και $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$.

- Από τον τύπο για $v \in H_0(\text{curl}; \Omega) \Leftrightarrow v \times \hat{n}|_{\Gamma} = 0$ παίρνουμε

$$(v, \text{curl } \phi) = (\text{curl } v, \phi) \text{ για κάθε } \phi \in H^1(\Omega)^3. \quad (5.31)$$

Το επόμενο θεώρημα καθιστά φανερό ότι η (5.31) χαρακτηρίζει τα στοιχεία του $H_0(\text{curl}; \Omega)$.

Θεώρημα 5.13. Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με φραγμένο Lipschitz σύνορο Γ . Αν για ένα $u \in H(\text{curl}; \Omega)$ ισχύει

$$(u, \text{curl } \phi) = (\text{curl } u, \phi) \text{ για κάθε } \phi \in D(\bar{\Omega})^3$$

τότε $u \in H_0(\text{curl}; \Omega)$.

5.5 Ο χώρος $W := H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{div } 0; \Omega)$

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι τα υποσύνολα

$$\begin{aligned} H_0(\text{div}; \Omega) &= \{u \in H(\text{div}; \Omega) : \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0\} \\ H(\text{div } 0; \Omega) &= \{u \in H(\text{div}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega}\} \end{aligned}$$

του $H(\text{div}; \Omega)$ είναι κλειστοί υπόχωροι του χώρου Hilbert $H(\text{div}; \Omega)$ [52] με τη νόρμα γραφήματος $\|u\|_{H(\text{div}; \Omega)} := (\|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\text{div } u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$. Επομένως και η τομή αυτών $W = H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{div } 0; \Omega)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $H(\text{div}; \Omega)$.

Έστω u ένα στοιχείο του W , τότε $u \in H(\text{div } 0; \Omega)$ οπότε $\text{div } u = 0|_{\Omega}$ και επομένως $\|u\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\text{div } u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2$, δηλαδή η νόρμα των στοιχείων του W ως υποχώρου του $H(\text{div}; \Omega)$ συμπίπτει με την $L^2(\Omega)^3$ νόρμα και έτσι έχουμε

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}, \text{ για κάθε } u \in W. \quad (5.32)$$

Συμπέρασμα:

Ο W είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H(\text{div}; \Omega)$ του οποίου η νόρμα που κληρονομεί από τον $H(\text{div}; \Omega)$ συμπίπτει με τη νόρμα του $L^2(\Omega)^3$ και είναι

$$W = \{u \in H(\text{div}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (5.33)$$

5.5.1 Ο χώρος $W_{\text{curl}} := \{u \in W : \text{curl } u \in W\}$

Είναι φανερό ότι ο W_{curl} είναι ένα μη κενό ($0 \in W_{\text{curl}}$) υποσύνολο του W . Έστω εάν $u, v \in W_{\text{curl}}$ τότε $u, v \in W$ και $\text{curl } u, \text{curl } v \in W$. Επειδή

5.5. Ο ΧΩΡΟΣ $W := H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{div } 0; \Omega)$

ο W είναι γραμμικός υπόχωρος του $H(\text{div}; \Omega)$ θα έχουμε $u + v \in W$ και $\text{curl } u + \text{curl } v \in W$ και επειδή $\text{curl}(u + v) = \text{curl } u + \text{curl } v$ προκύπτει ότι $u + v \in W$ και $\text{curl}(u + v) \in W$ οπότε από τον ορισμό του W_{curl} έχουμε $u + v \in W_{\text{curl}}$. Όμοια, αξιοποιώντας το ότι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ και $u \in W$ ισχύει $au \in W$ και ότι $\text{curl}(au) = a \text{curl } u$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ και $u \in W_{\text{curl}}$ ισχύει $ay \in W_{\text{curl}}$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο W_{curl} είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του W άρα και του $H(\text{div}; \Omega)$.

Έστω ένα $u \in W_{\text{curl}}$. Από τον ορισμό του W_{curl} και τη (5.33) έχουμε τις επόμενες ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} u \in W_{\text{curl}} &\Leftrightarrow u \in W \text{ και } \text{curl } u \in W \\ &\Leftrightarrow (u \in H(\text{div}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0) \text{ και} \\ &(\text{curl } u \in H(\text{div}; \Omega) : \text{div } \text{curl } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0) \\ &\Leftrightarrow (u \in L^2(\Omega)^3 : \text{div } u \in L^2(\Omega), \text{div } u = 0|_{\Omega}, \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0) \\ &\text{και } (\text{curl } u \in L^2(\Omega)^3, \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0) \\ &\Leftrightarrow u \in H(\text{div}, \text{curl}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega}, \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$W_{\text{curl}} = \{u \in H(\text{div}, \text{curl}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Gamma}, \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (5.34)$$

Από την (5.34) με αξιοποίηση της συνέχειας του τελεστή $\text{div} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ και του εσωτερικού γινομένου, συμπεραίνουμε ότι ο W_{curl} είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H(\text{div}, \text{curl}; \Omega) \subseteq H(\text{div}; \Omega), H(\text{curl}; \Omega)$.

Έστω πάλι ένα $u \in W_{\text{curl}} = \{u \in W : \text{curl } u \in W\}$. Για τη νόρμα γραφήματος του u έχουμε

$$\|u\|_{W_{\text{curl}}}^2 = \|u\|_W^2 + \|\text{curl } u\|_W^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\text{curl } u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 = \|u\|_{H(\text{curl}; \Omega)}^2$$

άρα

$$\|u\|_{W_{\text{curl}}} = \|u\|_{H(\text{curl}; \Omega)} \text{ για κάθε } u \in W_{\text{curl}}.$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι ο W_{curl} είναι πυκνός στον W .

Συμπέρασμα: Ο W_{curl} είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $H(\text{div}, \text{curl}; \Omega) = H(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{curl}; \Omega)$, πυκνός [52] στον W και η νόρμα των στοιχείων του συμπίπτει με την $H(\text{curl}; \Omega)$ νόρμα και είναι

$$W_{\text{curl}} = \{u \in H(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{curl}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega}, \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0\}.$$

5.5.2 Χρήσιμες ιδιότητες των στοιχείων των χώρων W και W_{curl}

Στις δύο προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι

$$W = \{u \in H(\text{div}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0\} \quad (5.35)$$

και

$$W_{\text{curl}} = \{u \in H(\text{div}, \text{curl}; \Omega) : \text{div } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (5.36)$$

Οι W και W_{curl} είναι και οι δύο υπόχωροι του $H(\text{div}; \Omega)$. Στην παράγραφο 5.4 είδαμε επίσης ότι ισχύει ο «γενικευμένος» τύπος του Green

$$\int_{\Omega} v \text{div } u \, dv_x + \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dv_x = \langle \hat{n} \cdot u|_{\Gamma}, v \rangle \quad (5.37)$$

για κάθε $u \in H(\text{div}; \Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$.

1. Έστω $u \in W$. Τότε από την (5.35) συνεπάγεται ότι

$$\text{div } u = 0|_{\Omega} \text{ και } \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0$$

οπότε ο τύπος (5.37) δίνει $\int_{\Omega} u \cdot v \, dv_x = 0$. Επομένως, ισχύει

$$\int_{\Omega} u \cdot \nabla u \, dv_x = 0 \quad (5.38)$$

για κάθε $u \in W$ και $v \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$.

2. Έστω $u \in W_{\text{curl}}$. Τότε από την (;;) συνεπάγεται ότι

$$\text{div } u = 0|_{\Omega}, \hat{n} \cdot u|_{\Gamma} = 0 \text{ και } \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma} = 0. \quad (5.39)$$

Από τις δύο πρώτες λαμβάνοντας υπόψη ότι $u \in W$, γιατί $W_{\text{curl}} \subset W$ όπως και παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dv_x = 0 \quad (5.40)$$

για κάθε $u \in W_{\text{curl}}$ και $v \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Επειδή $u \in W_{\text{curl}} = \{u \in W : \text{curl } u \in W\}$, οπότε ο τύπος (5.37) ισχύει και αν στη θέση του u θέσουμε το $\text{curl } u$ δηλαδή ισχύει

$$\int_{\Omega} v \text{div } \text{curl } u \, dv_x + \int_{\Omega} \text{curl } u \cdot \nabla v \, dv_x = \langle \hat{n} \cdot \text{curl } u|_{\Gamma}, v \rangle$$

η οποία μετατρέπεται στην $\int_{\Omega} \text{curl } u \cdot \nabla v \, dv_x = 0$ και επομένως

$$\int_{\Omega} \text{curl } u \cdot \nabla v \, dv_x = 0$$

για κάθε $u \in W_{\text{curl}}$ και $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$.

5.5. Ο ΧΩΡΟΣ $W := H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega)$

Συμπερασματικά, έχουμε

- για κάθε $u \in W$ και $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ισχύει $\int_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dv_x = 0$
- για κάθε $u \in W_{\operatorname{curl}}$ και $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ισχύουν $\int_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dv_x = 0$ και $\int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot \nabla v \, dv_x = 0$

Πρόταση 5.14. *Ισχύουν τα ακόλουθα*

- Ο W_{curl} είναι πυκνός, [52], στον W ,
- Ο W_{curl} είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert μόνο όταν είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα γραφήματος.

Βιβλιογραφία

- [1] S. Aksoy, O. A. Tretyakov: *The evolution equations in study of the cavity oscillations excited by a digital signal*, IEEE Trans. Antennas Prop., Vol. 52, No. 1, 2004.
- [2] G. Allaire: *Two scale convergence and homogenization of periodic structures*, School on homogenization ICTP, Trieste (1993).
- [3] E. Argyropoulou, A.D. Ioannidis: *The eigenvalue problem for a bianisotropic cavity*, PIERS Proceedings, Stockholm, Sweden, Aug. 12-15,2013, 858-862
- [4] G. Barbatis, I. G. Stratis: *Homogenization of Maxwell's equations in dissipative bianisotropic media*, Math. Methods Appl. Sci., 26, 2003, 1241–1253.
- [5] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, New York, 1978.
- [6] H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2010.
- [7] A. Bossavit: *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, Springer-Verlag, Paris, 2004.
- [8] A. Bossavit, G. Griso, B. Miara: *Modelling of periodic electromagnetic structures: bianisotropic materials with memory effects*, J. Math. Pures Appl. 84 (2005), 819-850.
- [9] M. Cessenat: *Mathematical Methods in Electromagnetism*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [10] O. Christensen: *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [11] P. Ciarlet Jr., G. Legendre: *Well-posedness of the Drude-Born-Fedorov model for chiral media*, Math. Models Methods Appl. Sci. 17, 2007, 461–484. Erratum: Math. Models Methods Appl. Sci. 19, 2009, 173–174

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [12] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso: *The periodic unfolding method in homogenization*, SIAM J Appl. Math 40 (2009), 1585-1620.
- [13] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso: *Periodic unfolding and homogenization*, C-R. Acad. Sci. Paris Math. 335 (2002), 99-104.
- [14] D. Cioranescu, P. Donato: *An introduction to homogenization*, Oxford U.P., 1999
- [15] G. Costanza and A.D. Ioannidis: *Remarks on the mathematical solution of the hollow cavity eigenvalue problem*, PIERS Proceedings, Stockholm, Sweden, Aug. 12-15,2013, 79-83.
- [16] A. Damlamian: *An elementary introduction to Periodic Unfolding*, GAKUTO International Series, Math.Sci. Appl. Vol. 24 (2005), 119-136.
- [17] R. Dautray and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 3: Spectral Theory*, Springer, Berlin, 1990.
- [18] L.C.Evans: *Partial differential equations*, American mathematical society (1997).
- [19] K. J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [20] J. Francu, N. Svanstedt: *Some remarks on two-scale convergence and periodic unfolding*, Appl. Math 57 (2012), 359-375.
- [21] D. J. Frantzeskakis, A. Ioannidis, G. F. Roach, I. G. Stratis, A. N. Yannacopoulos, *On the error of the optical response approximation in chiral media*, Appl. Anal. 82, 2003, 839–856.
- [22] W. Geyi: *Time-domain theory of metal cavity resonator*, PIER, Vol. 78, 219–253, 2008.
- [23] G. Helmberg: *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Spaces*, North Holland, Amsterdam, 1969.
- [24] A. D. Ioannidis: *On the cavity problem for the general linear medium in Electromagnetic Theory*, Bull. Greek Math. Soc., Vol. 57, 199–209, 2010.
- [25] A. D. Ioannidis, G. Kristensson and I. G. Stratis, *On the well-posedness of the Maxwell system for linear bianostropic media*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 44, No. 4, 2459–2473, 2012.

- [26] A. Ioannidis, *Μαθηματικά Προβλήματα Διάδοσης και Σκέδασης Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων σε Σύνθετα Μέσα*, Διδακτορική διατριβή, ΕΚΠΑ, 2006.
- [27] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik: *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [28] R. Kress: *Linear integral equations*, Springer, 1999.
- [29] R. Leis: *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner & Wiley, Stuttgart, 1986.
- [30] K. B. Liaskos: *A non-autonomous model for the evolution of electromagnetic fields in complex media*, *Mathematical methods in the Applied Science* 37, (2014), 245-250.
- [31] K. B. Liaskos, I. G. Stratis, A. N. Yannacopoulos: *Stochastic PDE models for chiral media: well posedness, singular limits and a priori estimates for their validity*, *Bull. Greek Math. Soc.*, 57, 2010, 265-279.
- [32] K. B. Liaskos, I. G. Stratis, A. N. Yannacopoulos: *A priori estimates for a singular limit approximation of the constitutive laws in the time domain*, *J. Math. Anal. Appl.* 355, 2009, 288–302.
- [33] J.D. Logan: *Εφαρμοσμένα μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2005).
- [34] T. G. Mackay, A. Lakhtakia: *Electromagnetic Anisotropy and Bi-Anisotropy: A Field Guide*, World Scientific, Singapore, 2010.
- [35] F. Murat: *A survey on compensated compactness*, *Contributions to the Modern Calculus of Variations* (ed. L. Cesari), Pitman Research Notes in Mathematics 148, Longman, Harlow, 1987, 145–183.
- [36] G. Nguetseng: *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, *SIAM J. Math. Anal.* 20, 1989, 608–623.
- [37] S. Nicaise: *Time-domain study of the Drude- Born-Fedorov model for a class heterogeneous chiral materials*, *Mathematical methods in the applied sciences*, 36, (2013), 745-768.
- [38] A. Omar: *Electromagnetic Scattering and Material Characterization*, Artech House, Boston, 2011.
- [39] A. Pazy: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [40] R. Picard: *On a selfadjoint realization of curl operator in exterior domains*, Math. Z. 229, (1998), 319-338.
- [41] G. F. Roach: *An introduction to echo analysis: Scattering theory and wave propagation*, Springer, 2008
- [42] M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego, 1980.
- [43] M. Renardy, R.C. Rogers: *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag.
- [44] G. F. Roach, I.G. Stratis and A.N. Yannacopoulos: *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*, Princeton U.P., New Jersey, 2012.
- [45] S. Salsa: *Partial differential equation in action. From modelling to theory*, Springer, 2008
- [46] D. T. Stoeva and P. Balazs: *Invertibility of multipliers*, Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol. 33, 292–299, 2012.
- [47] I. G. Stratis, A. N. Yannacopoulos: *Homogenisation theory for deterministic and random bianisotropic media*, Composites Part B-Engineering, 43, 2012, 2513–2520.
- [48] L. Tartar: *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Nonlinear Mechanics and Analysis: Heriot-Watt Symposium, volume IV (ed. R. J. Knops), Research Notes in Mathematics no. 39, Pitman, London, 1979, 136–212.
- [49] L. Tartar: *The General Theory of Homogenization, A Personalized Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [50] N. Wellander: *Homogenization of the Maxwell equations. Case I. Linear theory*, Appl. Math. 46, 2001, 29–51.
- [51] N. Wellander, G. Kristensson: *Homogenization of the Maxwell equations at fixed frequency*, SIAM J. Appl. Math. 64, 2003, 170–195.
- [52] Z. Yosida, Y. Giga: *Remarks on spectra of operator rot*, Math. Z. 204 (1990), 235-245.